

Письменный зачёт за первый модуль

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оцениваются в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет.

Задача 1. Пусть U, V, W — конечномерные векторные пространства над произвольным полем. Изоморфны ли пространства $\text{End}(U \otimes V \otimes W)$ и $\text{Hom}(\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W), \text{Hom}(U, W))$? Если да, то какому линейному отображению $\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}(U, W)$ отвечает тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$?

Задача 2. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен

$$9x^3 - 15yx^2 - 6zx^2 + 9xy^2 + 18z^2x - 2y^3 + 3zy^2 - 15z^2y + 7z^3$$

в многочлен от ≤ 2 переменных?

Задача 3. Найдите все комплексные решения системы уравнений $x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24$.

Задача 4. В $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ выразите $\prod_{i < j} (x_i + x_j)$ через элементарные симметрические многочлены $e_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Задача 5. Нарисуйте плотный вниз массив со строчной развёрткой

1	4	6
2	5	7
3	8	9

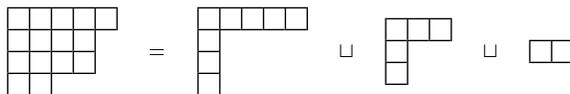
 и плотный влево

массив со столбцовой развёрткой¹

1	2	3
4	5	8
6	7	9

. Какой перестановке из S_9 отвечает по теореме о биекции эта пара массивов?

Задача 6. Разрежем диаграмму λ в объединение Γ -образных диаграмм $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ с углами на главной диагонали, как на рисунке:



(в общем случае k — число клеток на главной диагонали λ и $\gamma_i = (\lambda_i - i + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{\lambda_i^t - i})$).

Войдёт ли s_λ в разложение произведения $s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_k}$ по базису Шура, и если да, то с каким коэффициентом?

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

При условии, что все остальные задачи решены, правильное решение этой задачи даёт дополнительные 10 баллов сверх 60 полных баллов, получаемых за эту письменную работу.

Задача 7. Вычислите дискриминант² n -того кругового многочлена³ $\Phi_n(x)$.

¹напомним, что столбцовая развёртка массива a — это строчная развёртка транспонированного массива a^t

²напомним, что *дискриминант* приведённого многочлена $f(x) = \prod_{\nu} (x - \alpha_{\nu})$ равен $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$

³напомним, что n -тый круговой многочлен — это приведённый многочлен, корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени n из единицы и только они (корень n -той степени из единицы называется *примитивным*, если он является образующей мультипликативной циклической группы всех комплексных корней n -той степени из единицы)