# Листок 2

Задачи 1 – 5 составляют домашнее задание к 19 ноября и должны быть сданы к этому сроку

1. Решите следующие однородные или сводящиеся к ним уравнения:
   (1) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
   (2) $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$
   (3) $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$
   (4) $2y' + x = 4\sqrt{y}$;

2. Следующие уравнения являются линейными или уравнениями Бернулли (либо сводятся к ним). Найдите все их решения
   (1) $y' - y \operatorname{ctg} x = y^3 \cos x$;
   (2) $x(y' - e^y) = 1$;
   (3) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$
   (4) $y' \cos y + \sin y = x + 1$

3. Проверьте что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах и решите их:
   (1) $\frac{y}{x}dx + (\log x + y^2)dy = 0$;
   (2) $(y\sin(2x+y) + 2xy\cos(2x+y))dx + (x\sin(2x+y) + xy\cos(2x+y))dy = 0$
   (3) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$

4. Решите заданные уравнения, выделив полный дифференциал и заменив переменные:
   (1) $(y\sin(2x+y) + 2xy\cos(2x+y))dx + (2x\sin(2x+y) + xy\cos(2x+y))dy = 0$
   (2) $(\frac{y}{x} + 2xy\ln x)dx + (\ln x + 2y^2\ln x)dy = 0$

5. Решите уравнения подбором интегрирующего множителя
   (1) $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$
   (2) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

6. Выведите выражение интегрирующего множителя для уравнения Бернулли

7. Семейство кривых задано в полярных координатах дифференциальным уравнением $\frac{dr}{d\varphi} = f(r,\varphi)$. Докажите, что решения уравнения $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^2}{f(r,\varphi)}$ ортогональны кривым этого семейства.

8. Найдите
   (1) ортогональные траектории семейства кардиоид $r = C(1 + \cos\varphi)$;
   (2) траектории, пересекающие все окружности, проходящих через точки $(0,1)$ и (0,-1), под углом $\frac{\pi}{4}$.

9. Дано уравнение $y' = ky + f(x)$, где $k$ - постоянное, а $f(x)$ - периодическая функция с периодом $\omega$; докажите, что это уравнение имеет одно частное решение, периодическое с тем же периодом; найдите это решение.

10.* Пусть уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ допускает 2 непропорциональных интегрирующих множителя $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$. Докажите, что общее решение этого уравнения представляется в виде $\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$, где $C$ – произвольная постоянная.