Логика и алгоритмы -2010. Задание 6

83. Докажите, что если $B \lesssim C$, то $A^B \lesssim A^C$.

84. Докажите, что если $A \lesssim C$, то $A^B \lesssim C^B$.

85. Докажите, что если $A \cap B = \varnothing$, то $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$.
86. Докажите, что $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.
87. Докажите, что $(A^B)^C \sim A^{B\times C} \sim (A^C)^B$.
88. Докажите, что $(A^2)^* \sim (A^*)^2$.
89. а) Докажите, что если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathcal{P}(A \cup B) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
б) Выведите отсюда, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (теорема Кантора).
90. Докажите, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{R}^n$ для всех натуральных $n > 0$.
91. а) Докажите, что $\mathcal{P}(A)^B \sim \mathcal{P}(A \times B) \sim \mathcal{P}(B)^A$.
б) Докажите, что $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.
92. а) Докажите, что $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$
б) Докажите, что $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.
93. Докажите, что $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} \sim \mathbf{N}^{\mathbf{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbf{R})$.
94. Докажите, что
а) множество всех конечных подмножеств множества **N** счетно,
б) множество всех конечных подмножеств множества **R** имеет мощность континуума,
б) множество всех счетных подмножеств множества **R** имеет мощность континуума.
95. Существует ли множество $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{N})$ мощности континуума, такое что для всех $A,B \in X$ либо $A \subseteq B$, либо $B \subset A$?
96. Докажите, что если $X \subseteq \mathbf{R}^2$, то хотя бы одно из множеств X, $\mathbf{R} \setminus X$ имеет мощность континуума.
97. Докажите, что если $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \mathbf{R}$, то хотя бы одно из множеств A_i имеет мощность континуума.
98. Докажите, что множество всех биекций из **N** на **N** имеет мощность континуума.
99. а) Найдите мощность множества $\{X \mid A \subseteq X \subseteq B\}$, если известно, что $|A|=m$, $|B|=n>m$, n - натуральное.
б) Найдите мощность множества $\{X \mid X \subseteq B \wedge A \cap X = \varnothing\}$, если известно, что $|A|=m$, $|B|=n>m$, n - натуральное.
100. Найдите мощность множества всех сюръекций из A на B, если известно, что $|A| = n>3$, $|B| = 3$.
101. Дано конечное множество C мощности n. Сколькими способами можно выбрать в нем два непересекающихся подмножества?
102. Дано конечное множество C мощности n. Сколькими способами можно выбрать в нем два подмножества, одно из которых содержится в другом ?