Тригонометрические функции

Задача 1. a) Докажите, что функия e^z является непрерывной функцией одной комплексной переменной.

b) Найдите $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$.

c) Найдите $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1-z}{z^2}$.

Определение 1. Определим функции вещественной переменной

$$\sin(\phi)=\Im m\left(e^{i\phi}\right);\quad \cos(\phi)=\Re e\left(e^{i\phi}\right);\quad \operatorname{tg}(\phi)=\sin(\phi)/\cos(\phi).$$

Задача 2. a) Докажите, что $\cos(\phi)=\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$, $\sin(\phi)=\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$.

b) Запишите $\sin(\phi)$ и $\cos(\phi)$ как сумму ряда.

c) Докажите, что $\sin(\phi)$, $\cos(\phi)$ и $\operatorname{tg}(\phi)$ непрерывны.

d) Найдите $\lim\limits_{\phi\to 0}\frac{\sin(\phi)}{\phi}$, $\lim\limits_{\phi\to 0}\frac{\cos(\phi)-1}{\phi^2}$.

e) Докажите, что найдётся такое $\delta>0$, что для $0<\phi<\delta$ выполнено $\sin(\phi)<\phi$, $\operatorname{tg}(\phi)>\phi$.

Задача 3. a) Докажите, что $\sin(1)>0$, $\sin(2)>0$, $\cos(1)>0$, $\cos(2)<0$.

b) Докажите, что найдётся вещественное число $1<\eta<2$, такое что $e^{i\eta}=i$.

c) Докажите, что для всякого $z\in\mathbb{C}$, удовлетворяющего $|z|=1$, найдётся такое $\phi\in\mathbb{R}$, что $e^{i\phi}=z$.

d) Докажите, что для всякого $z\in\mathbb{C}$ найдётся такое $w\in\mathbb{C}$, что $e^w=z$.

Задача 4. a) Докажите, что найдётся такое $\pi\in\mathbb{R}$, $\pi>0$, что если $e^{i\phi}=e^{i\psi}$ для $\phi,\psi\in\mathbb{R}$, то $\phi-\psi=2\pi k$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}$.

b) Докажите, что $e^z=e^w$ для $z,w\in\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $z-w=2\pi ik$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}$.

c^*) Докажите, что в Задаче 3b число η определено однозначно и равно $\pi/2$.

Задача 5. Докажите, что для всякого $\phi\in\mathbb{R}$ выполнено

a) $\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)=1$;

b) $\sin(-\phi)=-\sin(\phi)$, $\cos(-\phi)=\cos(\phi)$;

c) $\sin(\pi+\phi)=-\sin(\phi)$, $\cos(\pi+\phi)=-\cos(\phi)$;

d) $\sin(\phi)=\cos(\pi/2-\phi)$;

e) $|\sin(\phi)|\leqslant|\phi|$.

С геометрической точки зрения, аргумент определённых выше функций измеряется в *радианах*, связанных с длиной дуги. Проясним, что это значит.

Задача 6. Пусть $0=\phi_0<\phi_1<\dots<\phi_n=\phi$ — набор вещественных чисел.

a) Докажите, что для любого вещественного $\varepsilon>0$ найдётся вещественное $\delta>0$, такое что если $\phi_{i+1}-\phi_i<\varepsilon$ для всех i, то длина ломаной, соединяющей последовательно точки $e^{i\phi_i}$, $i=0\dots n$, отличается от ϕ не более, чем на ε.

b^*) Докажите, что длина такой ломаной всегда меньше ϕ.

Задача 7*. a^*) Докажите, что периметр вписанного в окружность радиуса 1 многоугольника меньше 2π, а описанного — больше 2π. Выведите отсюда, что $3<\pi<4$.

b^*) Выразите периметр правильного 2^n-угольника с диагональю 1 в радикалах (используя целые числа, арифметические операции и знаки корня). Докажите, что π равно пределу этих чисел.