Группы в действии

А6◇1. Имеются одинаковые по форме бусины, раскрашенные n попарно разных цветов (запас бусин каждого из цветов неограничен). Сколько различных на вид бус можно изготовить из **а**) 4 **б**) 7 **в**) 8 **г**) 9 бусин?

А6◇2. Конечная группа транзитивно действует на множестве, содержащем более одного элемента. Верно ли, что всегда найдётся элемент группы, действующий без неподвижных точек?

А6◇3. Пусть $|G| = p^n m$, где p — простое и взаимно простое с m. Рассмотрим левое регулярное действие группы G на себе и индуцированное им действие G на множестве $\mathscr{E}$ всех подмножеств в G, состоящих из p^n элементов. Могут ли два различных правых смежных класса одной и той же силовской подгруппы $S \subset G$ оказаться в одной орбите этого действия?

А6◇4. Бывают ли неабелевы группы порядка **а**) 19 **б**) 38 **в**) 57 **г**) 95 **д**) 133 **е**) 209 ?

А6◇5. Впишем правильный треугольник в единичную окружность с центром в нуле на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с координатой z так, чтобы одна из его вершин оказалась в точке $z = 1$, и отождествим единичную сферу, для которой эта окружность служит диаметральным сечением, с проективной прямой $\mathbb{CP}_1$ при помощи стереографической проекции из северного полюса. Группа треугольника $\mathfrak{S}_3$ действует на $\mathbb{CP}_1$ вращениями сферы. Будем записывать эти преобразования как дробно линейные преобразования координаты[1] z.

а) Выпишите явно все 6 дробно линейных преобразований из $\mathfrak{S}_3$.

б) Что за подгруппа в PGL_2 порождается заменами $z \mapsto z^{-1}$ и $z \mapsto (1 - z)$?

в) Найдите какую-нибудь непостоянную рациональную функцию от z, инвариантную относительно всех замен из предыдущих двух пунктов.

г*) Опишите все такие рациональные функции.

А6◇6. Обобщите предыдущую задачи на произвольную группу диэдра $\mathfrak{D}_n$, т. е. опишите все

а) дробно линейные преобразования координаты z, возникающие при действии $\mathfrak{D}_n$;

б*) рациональные функции от z, инвариантные относительно замен из $\mathfrak{D}_n$.

А6◇7. Все ли конечные подгруппы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ состоят лишь из диагонализуемых операторов?

А6◇8. Докажите, что любое множество коммутирующих операторов в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ имеет общий собственный вектор, а если все операторы к тому же диагонализуемы, то их можно диагонализовать одновременно в одном базисе.

А6◇9 (формула Молина). Для комплексного линейного представления $\varrho : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ обозначим через n_d размерность пространства $\mathfrak{G}$-инвариантных однородных полиномов степени d на V:

$$n_d = \dim\{f \in S^d V^* \mid f(gv) = f(v) \ \forall\, g \in \mathfrak{G}\,\}$$

Докажите, что производящая функция $\displaystyle\sum_{d \geqslant 0} n_d \cdot t^d = |\mathfrak{G}|^{-1} \sum_{g \in \mathfrak{G}} \det\big(E - t \cdot \varrho(g)\big)^{-1}$.

А6◇10. Постройте изоморфизм группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ дробно линейных преобразований проективной прямой над полем $\mathbb{F}_5$ с симметрической группой $\mathfrak{S}_5$.

А6◇11. Последовательность подпространств $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = v$ в n-мерном векторном пространстве V называется *полным флагом*.

а) Постройте биекцию между полными флагами в координатном пространстве $\mathbb{F}_p^n$ над $\mathbb{F}_p$ и силовскими p-подгруппами в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$

б) Явно опишите хоть одну и найдите число всех силовских p-подгрупп в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

А6◇12. Опишите классы сопряжённых элементов в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

А6◇13*. Опишите (с точностью до сопряжения) все конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

[1] скажем, симметрии относительно оси OX отвечает преобразование $z \mapsto 1/z$