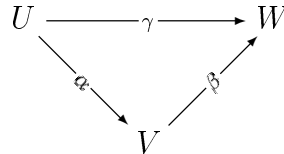


Диаграммный поиск

Терминология. Всюду далее речь идёт про произвольные абелевы группы. Композиция гомоморфизмов абелевых групп $\varphi\psi$ называется *точной*, если $\ker \varphi = \text{im } \psi$. Цепочка гомоморфизмов называется *точной*, если композиция любых двух её последовательных элементов точна. Диаграмма гомоморфизмов называется *коммутативной*, если различные цепочки стрелок, ведущие из одной группы в другую, одинаково действуют на любой элемент первой группы. Напомним также, что $\text{coker } (U \xrightarrow{\varphi} W) \stackrel{\text{def}}{=} W/\text{im } \varphi$.

А6◊1. В идущем далее наборе утверждений про коммутативный треугольник



верные утверждения докажите, а неверные — опровергните конкретными контрпримерами.

- | | | |
|--|--|--|
| а) α, β эпи $\Rightarrow \gamma$ эпи | б) α, β моно $\Rightarrow \gamma$ моно | в) γ эпи $\Rightarrow \alpha$ эпи |
| г) γ эпи $\Rightarrow \beta$ эпи | д) γ моно $\Rightarrow \alpha$ моно | е) γ моно $\Rightarrow \beta$ моно |
| ж) если α эпи, то $(\gamma \text{ эпи} \iff \beta \text{ эпи})$ | з) если α эпи, то $(\gamma \text{ моно} \iff \beta \text{ моно})$ | и) если β эпи, то $(\gamma \text{ эпи} \iff \alpha \text{ эпи})$ |
| и) если β эпи, то $(\gamma \text{ эпи} \iff \alpha \text{ эпи})$ | к) если β эпи, то $(\gamma \text{ моно} \iff \alpha \text{ моно})$ | |
| л) если γ изоморфизм, то α моно, а β эпи. | | |

А6◊2. Какие из перечисленных ниже импликаций верны для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1)$$

- а) φ изоморфизм $\iff (\varphi'$ моно & φ'' эпи) б) φ', φ'' изоморфизмы $\Rightarrow \varphi$ изоморфизм.

А6◊3 (лемма о пяти гомоморфизмах). Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} V_1' & \longrightarrow & V_2' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_2'' & \longrightarrow & V_1'' \\ \varphi_1' \downarrow & & \varphi_2' \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2'' & & \downarrow \varphi_1'' \\ W_1' & \longrightarrow & W_2' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W_2'' & \longrightarrow & W_1'' \end{array}$$

Влечёт ли а) биективность б) инъективность в) сюръективность четырёх боковых стрелок $\varphi_1', \varphi_1'', \varphi_2', \varphi_2''$ одноимённое свойство центральной стрелки φ ?

А6◊4. Покажите, что имеется единственный гомоморфизм $V' \xrightarrow{\varphi'} W'$, дополняющий диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

до коммутативной. При каком условии φ' инъективен?

А6◊5. Тот же вопрос про диаграмму

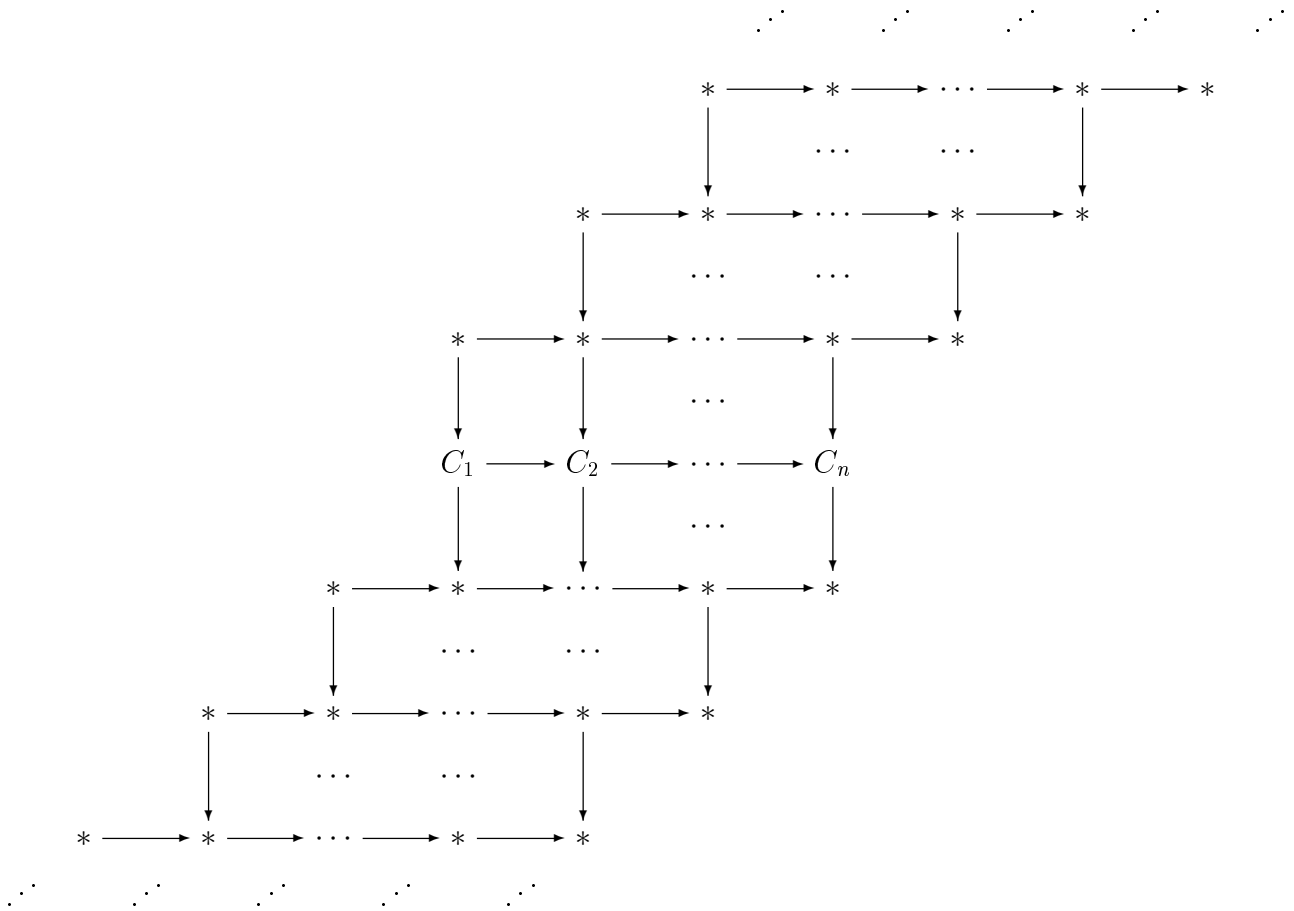
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

но требуется найти достаточное условие для сюръективности φ'' .

А6◇6 (лемма о змее). Для диаграммы (1) с точными строками постройте длинную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow \ker \varphi'' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi'' \longrightarrow 0 .$$

А6◇7. Рассмотрим бесконечную коммутативную диаграмму из ведущих вниз и направо стрелок, ненулевые элементы которой сосредоточены в области



(стрелки продолжаютя и за пределы этой области, но выходят из нулей и входят в нули, которые мы не изобразили). Допустим, что в этой диаграмме все столбцы и все строки кроме строки C точны, и известно, что где-то выше строки C и где-то ниже строки C есть целиком нулевые строки. Покажите, что строка C точна, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) нулевая строка стоит непосредственно над строкой C ;
- б) нулевая строка стоит непосредственно под строкой C ;
- в) строка C является комплексом (т. е. композиция любых двух последовательных стрелок в ней нулевая).