Алгебра. Листок 6.

$\diamond$ **6.1.** *V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, U — линейное подпространство в V, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в U. Докажите, что этот базис можно дополнить до базиса V, т.е. существуют такие $g_1, \ldots, g_l \in V$, что элементы $e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_l$ образуют базис V.*

$\diamond$ **6.2.** *а) W — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, U и V — линейные подпространства в W, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в U, $g_1, \ldots, g_l$ — базис в V, причем $\dim W = k + l$ и $U \cap V = \{0\}$. Докажите, что $e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_l$ образуют базис W.*
б) Верно ли, что если U, V и T — три линейные подпространства конечномерного линейного пространства W, такие что $U \cap V = U \cap T = V \cap T = \{0\}$ и $\dim U + \dim V + \dim T = \dim W$, то объединение базисов пространств U, V и T является базисом W?

$\diamond$ **6.3.** *U и V — линейные подпространства конечномерного линейного пространства W.*
а) Докажите, что множество $U \cap V$ тоже является линейным подпространством W.
б) Докажите, что множество $U + V = \{u + v, \quad u \in U, v \in V\}$ тоже является линейным подпространством W.
в) Докажите, что $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$.

$\diamond$ **6.4.** *$f : U \to V$ — линейное отображение конечномерных линейных пространств. Докажите, что если $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, то*
а) f инъективно (т.е. из $u_1 \neq u_2$ следует, что $f(u_1) \neq f(u_2)$). *б) $\dim U \leq \dim V$.*
в) в U и V можно выбрать базисы таким образом, что матрица линейного отображения f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} E \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевая.

$\diamond$ **6.5.** *Пусть $f : U \to V$ — линейное отображение конечномерных линейных пространств. Докажите, что в U и V можно выбрать базисы таким образом, что матрица линейного отображения f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевые матрицы.*

$\diamond$ **6.6.** *Пусть $f : U \to V$ — линейное отображение конечномерных линейных пространств. Докажите, что $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.*

$\diamond$ **6.7.** *Зафиксируем $n+1$ число $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$. Определим отображение f из пространства $\mathcal{P}_n = \{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}\}$ (т.е. многочлены степени не выше n) в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом: $f(P(t)) = (P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_{n+1})) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что $f : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ линейное отображение, найдите его матрицу в стандартных базисах и докажите, что f обратимо.*

$\diamond$ **6.8.** *Пусть $\mathcal{P}_2 = \{at^2 + bt + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$ — пространство многочленов степени не выше второй, M — пространство вещественных матриц размером 2×2, A — фиксированная матрица из M. Определим отображение $f_A : L \to M$ так: $f_A(P(t)) = P(A)$. (Матрица $P(A)$ — это матрица $aA^2 + bA + cE$, где E — единичная матрица.) Докажите, что это линейное отображение. Для следующих случаев найдите его ядро и образ, а также матрицу в подходящих базисах:*
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; *б)$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;* *в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*
г) Как изменится образ, если вместо $\mathcal{P}_2$ взять $\mathcal{P}_n$ или $\mathbb{R}[x]$?

$\diamond$ **6.9.** *Пусть U_0 — линейное подпространство в U, V_0 — линейное подпространство в V; докажите, что множество всех таких линейных отображений $f : U \to V$, что $\operatorname{Ker} f \supset U_0$ и $\operatorname{Im} f \subset V_0$, является линейным пространством. Найдите его размерность, если все пространства конечномерны, причем $\dim U = k$, $\dim U_0 = k_0$, $\dim V = l$, $\dim V_0 = l_0$.*

$\diamond$ **6.10.** *а) Линейный оператор на двумерном линейном пространстве имеет в некотором базисе матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажите, что ни в каком базисе этот оператор не записывается диагональной матрицей.*
б) Тот же вопрос в n-мерном случае для матрицы $a_{i,j} = \delta_{i+1,j}$.

◇ **6.11.** *Напишите в стандартном базисе трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ матрицы следующих линейных операторов:*
а) ортогонального проектирования на плоскость $x + y + z = 0$;
б) ортогонального проектирования на прямую $x = y = z$;
в) поворота на угол φ вокруг прямой $x = y$, $z = 0$.

◇ **6.12.** *Пусть $\mathcal{P}_n = \{a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}\}$ — пространство многочленов степени не выше n. Определим отображение $\Delta : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ так: $\Delta(P(t)) = P(t+1) - P(t)$. (Δ называется* **оператором первой разности***.) Докажите, что это линейное отображение, найдите его ядро и образ, а также матрицу в базисе $1, t, t^2, \ldots t^{n-1}, t^n$. Найдите минимальный многочлен оператора Δ.*

◇ **6.13.** *Пусть f, g — два линейных оператора на конечномерном линейном пространстве V.*
а) Докажите, что $\operatorname{Ker}(f \circ g) \supset \operatorname{Ker} g$, и $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$.
б) Приведите пример двух операторов, для которых оба включения строгие.

◇ **6.14.** *Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V.*
а) Докажите, что если $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$, то $\forall n > k$ $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^k$.
б) Докажите, что если $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$, то $\forall n > k$ $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^k$.
в) Докажите, что если f — нильпотентный оператор, то $f^{\dim V} = 0$.

◇ **6.15.** *Пусть f идемпотентный линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V.*
а) Докажите, что $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
б) Докажите, что в V можно выбрать базис таким образом, что матрица оператора f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевые матрицы.

◇ **6.16.** *Пусть линейный оператор f на конечномерном линейном пространстве V удовлетворяет уравнению $f^2 = \mathrm{Id}_V$. Докажите, что в V можно выбрать базис таким образом, что матрица оператора f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -E \end{pmatrix}$, где E — единичные матрицы, а $\mathbf{0}$ — нулевые матрицы. ($\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.)*

◇ **6.17.** *Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V, U — линейное подпространство V. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ выбран таким образом, что $e_1, \ldots, e_k$ $(k < n)$ — базис пространства U. Докажите, что подпространство U инвариантно относительно f (т.е. $f(U) = U$) тогда и только тогда, когда оператор f записывается в базисе $e_1, \ldots, e_n$ блочной матрицей вида $\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$, где A — $k \times k$ матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевая матрица.*

◇ **6.18.** *Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V, $\lambda \in \mathbb{K}$ фиксировано. Докажите, что множество $V_\lambda = \{v \in V, \quad f(v) = \lambda v\}$ является линейным подпространством V, инвариантным относительно f.*

◇ **6.19.** *Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V, $v_1, \ldots, v_k \in V$ таковы, что $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$, причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ все различны. Докажите, что тогда $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.*

◇ **6.20.** *Пусть A диагональная матрица, причем все стоящие на диагонали числа различны. Докажите, что любая матрица, перестановочная с A, имеет вид $P(A)$, где $P(x)$ — некоторый многочлен.*

◇ **6.21.** *Вычислите определитель матрицы $\lambda E - A$,* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

◇ **6.22.** *Найдите минимальный многочлен матрицы A из предыдущей задачи.*