

### Листок 3

Задачи 1 – 6 составляют домашнее задание к 26 ноября и должны быть сданы к этому сроку. Задачу 10 также рекомендуется решать до 26 ноября – похожие задачи будут на контрольной.

1. Пусть  $y(x)$  - решение задачи Коши  $y(0) = 0$  для уравнения  $y = x - y^2$ . Найдите приближенное значение  $y(1)$ ,
  - (1) построив ломаную Эйлера с шагом  $1/4$ ;
  - (2) сделав 4 итерации в методе последовательных приближений.
2. (1) При каких  $a$  через каждую точку плоскости  $x, y$  проходит единственная интегральная кривая уравнения  $y' = |y|^a$ ? Как это согласуется с теоремой существования и единственности?
  - (2) Выделите на плоскости  $x, y$  точки, через которые проходит единственная интегральная кривая уравнения  $xy' = \sqrt[3]{y^2 - x^2}$ .
3. Сосуд с емкостью 100 л наполнен рассолом, содержащим 10 кг растворенной соли. В одну минуту в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же емкости, первоначально наполненный водой, из которой избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах будет одинаково? Считать, что перемешивание происходит мгновенно.
4. Футбольный мяч весом 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/сек. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 Г при скорости 1 м/сек. Вычислите время подъема мяча и наибольшую высоту подъема.
5. За малое время  $\Delta t$  из каждого грамма радия распадается  $0,00044\Delta t$  грамма и образуется  $0,00043\Delta t$  граммов радона. Из каждого грамма радона за время  $\Delta t$  распадается  $70\Delta t$  грамма. В начале опыта имелось некоторое количество  $x_0$  чистого радия. Когда количество образовавшегося и еще не распавшегося радона будет наибольшим?
6. Капля с начальной массой  $M$  г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и каждую секунду теряет  $m$  г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала свободного падения капли. Считать, что коэффициент пропорциональности  $k \neq m$ .
7. Однородный резиновый шнур длиной в  $l$  м под действием силы  $f$  кг удлиняется на  $kfl$  метр. На сколько удлинится такой же шнур длины  $l$  м и веса 2 кг под действием своего веса, если его подвесить за один конец?
8. Канат натянут на круглый столб, вокруг которого он делает один оборот. Натяжение на одном конце 10 кг, на втором – 1 кг. Найдите коэффициент трения каната о столб.
9. Масса ракеты с полным запасом топлива равна 1000 кг, без топлива 500 кг, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна 100 м/сек, начальная скорость ракеты равна нулю. Найдите скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

10. Решите следующие дифференциальные уравнения:

- |   |              |
|---|--------------|
| (1) $xy' + 1 = e^{x-y}$                         | Филиппов 382 |
| (2) $y' = \operatorname{tg}(y - 2x)$            | Филиппов 383 |
| (3) $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$    | Филиппов 405 |
| (4) $(x\sqrt{y^2 + 1} + 1)(y^2 + 1)dx = xydy$   | Филиппов 409 |
| (5) $y' \operatorname{tg} y + 4x^3 \cos y = 2x$ | Филиппов 415 |
| (6) $xy' = x^2 e^{-y} + 2$                      | Филиппов 392 |
| (7) $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$             | Филиппов 339 |