

## Логика и алгоритмы -2010. Задание 7

103. Для каждого из логических правил исчисления SC докажите следующее утверждение:

если обе верхние секвенции общезначимы, то и нижняя секвенция общезначима.

104. Для каждой аксиомы  $\alpha$  гильбертовского исчисления высказываний CL докажите секвенцию  $\vdash \alpha$  в исчислении SC.

105. Для каждого из логических правил исчисления SC докажите следующее утверждение:

если одна из верхних секвенций ложна при некоторых значениях пропозициональных букв, то и нижняя секвенция ложна при тех же значениях пропозициональных букв.

106. Выведите в SC следующие секвенции:

а)  $\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) \equiv ((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma))$

б)  $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

в)  $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

г)  $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

д)  $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$

е)  $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$

107. Используя задачу 105, для следующих секвенций найдите хотя бы один опровергающий набор значений пропозициональных букв

а)  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg p)) \vdash (\neg q \Rightarrow r)$

б)  $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg r \vee \neg p)) \vdash \neg(\neg q \Rightarrow r)$

в)  $\vdash (((((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \Rightarrow r)$

г)  $\vdash (((p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r))$

д)  $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)) \vdash (\neg q \vee \neg r)$

108. Используя корректность и полноту, докажите, что множество теорем исчисления SC не изменится, если присоединить к нему следующие правила:

а) 
$$\frac{\Gamma \vdash \neg\alpha \Delta}{\alpha \Gamma \vdash \Delta}$$

б) 
$$\frac{\neg\alpha \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \Delta}$$

в) 
$$\frac{(\alpha \wedge \beta) \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \beta \Gamma \vdash \Delta}$$

г) 
$$\frac{\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \beta \Delta}$$

д) 
$$\frac{\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Delta}{\alpha \Gamma \vdash \beta \Delta}$$

е) 
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \Delta, \alpha \Theta \vdash \Pi}{\Gamma \Theta \vdash \Delta \Pi} \quad (\text{правило сечения})$$

## Секвенциальное исчисление SC

Аксиомы:  $\alpha \vdash \alpha$

Правила добавления:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\alpha \Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \Delta}$$

Логические правила:

$$(\neg \mid \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \mid \Rightarrow \alpha \Delta}{\neg \alpha \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}$$

$$(\mid \Rightarrow \neg) \quad \frac{\alpha \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}{\Gamma \mid \Rightarrow \neg \alpha \Delta}$$

$$(\wedge \mid \Rightarrow) \quad \frac{\alpha \beta \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}{(\alpha \wedge \beta) \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}$$

$$(\mid \Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \mid \Rightarrow \alpha \Delta, \Gamma \mid \Rightarrow \beta \Delta}{\Gamma \mid \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \Delta}$$

$$(\vee \mid \Rightarrow) \quad \frac{\alpha \Gamma \mid \Rightarrow \Delta, \beta \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}{(\alpha \vee \beta) \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}$$

$$(\mid \Rightarrow \vee) \quad \frac{\Gamma \mid \Rightarrow \alpha \beta \Delta}{\Gamma \mid \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \Delta}$$

$$(\Rightarrow \mid \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \mid \Rightarrow \alpha \Delta, \beta \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \Gamma \mid \Rightarrow \Delta}$$

$$(\mid \Rightarrow \Rightarrow) \quad \frac{\alpha \Gamma \mid \Rightarrow \beta \Delta}{\Gamma \mid \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Delta}$$