

## Логика и алгоритмы -2010. Задание 8

Определение Пусть  $M$  - интерпретация сигнатуры  $\Omega$ ,  $\varphi(x)$  - формула сигнатуры  $\Omega$  с одной свободной переменной  $x$ , и пусть  $A = \{a \in M \mid M \models \varphi(a)\}$ . В этом случае говорят, что множество  $A$  *определимо* формулой  $\varphi(x)$ .

Определение Пусть  $\Omega_a$  - сигнатура с равенством, двуместными функциональными символами  $+$ ,  $\cdot$  и константами  $0$ ,  $1$ . Пусть  $\mathbf{N}$  - ее стандартная интерпретация на множестве всех натуральных чисел. Определимые подмножества  $\mathbf{N}$  называются *арифметическими*.

109. Докажите, что следующие множества натуральных чисел - арифметические:

- а) множество всех нечетных чисел,
- б) множество всех простых чисел,
- в) множество всех степеней числа 2.

110. Докажите, что объединение двух определимых множеств есть определимое множество; аналогично - для пересечения и разности.

111. Пусть  $A, B$  - арифметические множества. Докажите, что множества

$$A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}, A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$$

- арифметические.

112. Докажите, что если множество натуральных чисел составляет арифметическую прогрессию, то оно - арифметическое.

113. Докажите, что если множество натуральных чисел составляет геометрическую прогрессию, то оно - арифметическое.

Определение Пусть  $M$  - интерпретация сигнатуры  $\Omega$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  - формула сигнатуры  $\Omega$  со свободными переменными  $x_1, \dots, x_n$ , и пусть  $A = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$ . В этом случае говорят, что  $n$ -местное отношение  $A$  *определимо* формулой  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ .  $n$ -местная функция называется *определимой*, если определим ее график. Предикаты, задающие определимые отношения, также называются *определимыми*.

Определимые отношения и функции в  $\mathbf{N}$  называются *арифметическими*.

114. Докажите, что функция  $f(x) = [x^{1/2}]$  (целая часть квадратного корня) - арифметическая.

115. Докажите, что следующие функции - арифметические

- а) НОД( $x, y$ )
- б) НОК( $x, y$ )
- в)  $f(x)$  = наибольший простой делитель  $x$

116. Докажите, что первая и вторая проекции определимого бинарного отношения - определимы.

117. Докажите, что образ определимого  $n$ -местного отношения относительно определимой  $n$ -местной функции - определимое множество.

118. Докажите, что не все множества натуральных чисел - арифметические.

119. Пусть  $M$  - интерпретация сигнатуры теории множеств (с символами  $\in, =$ ). Докажите определимость следующих предикатов в  $M$ :

- а)  $z = x \cap y$ ,
- б)  $z = x \setminus y$ ,
- в)  $y = \mathcal{P}(x)$ ,
- г)  $y = \{x\}$ .