

## Производная

**Задача 1.** Докажите, что  $e^z$  дифференцируема в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$  как функция комплексной переменной, причём её производная в точке  $w$  равна  $e^w$ .

**Задача 2.** Вычислите производные следующих функций вещественной переменной:

a)  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ;

b)  $\operatorname{tg}(x)$ ;

c)  $\ln(x)$ ;

d)  $x^a$ ;

e)  $a^x$ ;

f)  $x^x$ ;

g)  $f^g$ , зная производные функций  $f$  и  $g$ .

**Задача 3.** а) Докажите, что  $\sin(x)$  больше нуля при  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$  и меньше нуля при  $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для  $\cos(x)$ .

б) Докажите, что  $\cos(x)$  строго возрастает на отрезках  $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$  и строго убывает на отрезках  $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для  $\sin(x)$ .

в) Докажите, что  $\operatorname{tg}(x)$  строго возрастает на интервалах  $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 1.** Определим *обратные тригонометрические функции*: арксинус  $\operatorname{arcsin}(y)$  как обратную к  $\sin(x)$  на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$ , арккосинус  $\operatorname{arccos}(y)$  как обратную к  $\cos(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$ , арктангенс  $\operatorname{arctg}(y)$  как обратную к  $\operatorname{tg}(x)$  на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

**Задача 4.** а) Выразите  $\operatorname{arccos}(x)$  через  $\operatorname{arcsin}(x)$ .

б) Найдите обратные функции к  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  и  $\operatorname{tg}(x)$  на всех промежутках монотонности.

в) Вычислите производные обратных тригонометрических функций.

**Задача 5.** Укажите промежутки монотонности и найдите на них обратную функция к

а)  $\sec(x) = 1/\cos(x)$ ;

б)  $\operatorname{ctg}(x) = 1/\operatorname{tg}(x)$ ;

в)  $e^{-x^2+x}$ ;

г)  $\sin(1/x)$ .

**Задача 6.** Докажите, что если  $x$  — одновременно точка перегиба и локальный экстремум дифференцируемой функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $f$  постоянна на некотором содержащем  $x$  отрезке.

**Задача 7.** Найдите локальные максимумы/минимумы, промежутки монотонности, точки перегиба и промежутки выпуклости для следующих функций. Нарисуйте их графики.

а)  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ;

б)  $(x^2+1)e^x$ ;

в)  $x^2e^{-x^2}$ ;

г)  $x - 2 \operatorname{arctg}(x)$ .

**Задача 8\*.** а\*) Докажите, что для всяких вещественных  $a, b > 0$  и  $p > q > 0$  выполнено

$$\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

б\*) Найдите  $\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$ .