

Топология в анализе

Задача 1*. Докажите, что образ компактного множества при непрерывном отображении компактен. Выведите отсюда, что непрерывная функция на компакте принимает минимальное и максимальное значение.

Задача 2*. Докажите, что последовательность вложенных непустых компактных множеств имеет непустое пересечение.

Определение 1. Множество X называется *связным*, если X невозможно представить объединением двух непересекающихся открытых в X подмножеств.

Задача 3*. $a^*)$ Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении связан.

$b^*)$ Докажите, что отрезок прямой связан. Выведите отсюда теорему о промежуточном значении.

$c^*)$ Найдите все связные подмножества \mathbb{R} .

Задача 4*. $a^*)$ Постройте функцию вещественной переменной, непрерывную во всех иррациональных точках и разрывную во всех рациональных.

$b^{**})$ Докажите, что не бывает функции вещественной переменной, непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных.