

## 9. ТЕОРИЯ МОРСА.

**Задача 1.** а) Функция  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$  определена равенством  $f([x_0 : x_1 : x_2]) = \frac{x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$ . Докажите, что  $f$  — функция Морса, вычислите ее критические точки и их индексы. Проверьте в полученной ситуации неравенства Морса. б) Аналогичные вопросы про функцию  $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную равенством  $f([x_0 : \dots : x_n]) = \frac{\sum_{i=0}^n (i+1)x_i^2}{\sum_{i=0}^n x_i^2}$ .

**Задача 2.** Шарнирный механизм состоит из трех стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  длины 1, последовательно соединенных шарнирами. Точка  $A$  закреплена в начале координат, точки (шарниры)  $B$  и  $C$  свободно движутся по плоскости, а точка  $D$  движется по оси абсцисс. а) Докажите, что пространство  $M$  положений механизма представляет собой гладкое двумерное многообразие. б) При каких  $a$  множество  $M_a$  положений механизма, при которых точка  $D$  имеет координаты  $(a, 0)$  на плоскости, представляет собой многообразие? Какое именно? в) Опишите множество  $M_a$  при прочих значениях  $a$ . г) Какому именно двумерному многообразию гомеоморфно  $M$ ?

**Задача 3.** Шарнирный механизм состоит из четырех стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  длины 1, последовательно скрепленных шарнирами. Точка  $A$  закреплена в начале координат, точка  $E$  закреплена в точке с координатами  $(a, 0)$ , остальные точки свободно движутся по плоскости. а) При каких  $a$  пространство положений механизма представляет собой многообразие? б) Докажите, что при всех таких значениях  $a$  это многообразие — сфера с ручками, и вычислите наибольшее возможное количество ручек.

**Задача 4.** а) Существует ли многочлен  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  от двух переменных такой, что  $p(x, y) > 0$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , но  $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} p(x, y) = 0$ ? б) Функция  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в начале координат единственную критическую точку, причем эта точка является точкой локального минимума. Обязательно ли эта точка является точкой глобального минимума?