10.1 (*квадратурные формулы*). Пусть $T_n = (a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k_n}^{(n)} = b)$ — последовательность разбиений отрезка $[a,b]$. Предположим, что для каждого n задан набор чисел $c_0^{(n)}, \ldots, c_{k_n}^{(n)} \in \mathbb{R}$. *Квадратурной формулой* называется формула вида

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k_n} c_i^{(n)} f(t_i^{(n)}) + r_n(f), \tag{1}$$

где $f \in C[a,b]$. Формула (1) называется *сходящейся* на функции f, если $r_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) Формула (1) сходится для всех $f \in C[a,b]$;
(2) Формула (1) сходится для всех $f \in X_0$, где $X_0 \subset C[a,b]$ — плотное векторное подпространство, и $\sup_n \sum_{i=0}^{k_n} |c_i^{(n)}| < \infty$.

Определение 10.1. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ и $N \subset X^*$. Положим

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \quad \forall\, x \in M\} \quad (\textit{аннулятор } M),$$
$$^\perp N = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall\, f \in N\} \quad (\textit{преданнулятор } N).$$

10.2. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. задачу 7.1) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$. Найдите $^\perp c_0$ и $(^\perp c_0)^\perp$.

10.3. Пусть Z — нерефлексивное банахово пространство и $X = Z^*$. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq (^\perp N)^\perp$.

10.4. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание:* X обязано быть нерефлексивным — см. лекцию.)

10.5. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$.
1) Докажите, что $T = \varkappa\sigma$, где $\varkappa$ — инъективный, а σ — открытый оператор.
2) Докажите, что $T = \mu\tau$, где μ — топологически инъективный оператор с замкнутым образом, а τ — оператор с плотным образом.
3) Сформулируйте и докажите утверждения о единственности разложений из пп. 1 и 2.

Определение 10.2. Оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *строгим*, если он осуществляет открытое отображение X на $\operatorname{Im} T$ и $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.

10.6. Докажите, что если X и Y — банаховы пространства, то оператор T осуществляет открытое отображение X на $\operatorname{Im} T$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.

10.7. Пусть X, Y — банаховы пространства
1) Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ строгий тогда и только тогда, когда T^* строгий.
2) Докажите, что если T (или, эквивалентно, T^*) строгий, то $\operatorname{Im} T = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$ и $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Разложение оператора. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Положим $\operatorname{Coim} T = X/\operatorname{Ker} T$ (*кообраз* T). Из свойств факторпространств (см. лекцию) следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ \operatorname{Coim} T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \overline{\operatorname{Im} T} \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

в которой Q — факторотображение и J — тождественное вложение.

10.8. Докажите, что следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ эквивалентны:

(1) T строгий;
(2) для любого разложения из п. 1 задачи 10.5 оператор $\varkappa$ топологически инъективен и имеет замкнутый образ;
(3) для любого разложения из п. 2 задачи 10.5 оператор τ открыт;
(4) оператор $\widetilde{T}$ из разложения (2) — топологический изоморфизм.

10.9 (*«усиленная лемма Серра»*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;
(2) последовательность $X^* \xleftarrow{S^*} Y^* \xleftarrow{T^*} Z^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.

Как следствие, цепной комплекс банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс.

10.10 (*«лемма Серра»*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Постройте изометрический изоморфизм $(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*$.

Как следствие, если C — цепной комплекс банаховых пространств со строгими дифференциалами, то $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.

10.11. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Положим $\operatorname{Coker} T = Y/\overline{\operatorname{Im} T}$ (*коядро* T). Докажите, что если X, Y — банаховы пространства и оператор T строгий, то существуют изометрические изоморфизмы $(\operatorname{Ker} T)^* \cong \operatorname{Coker} T^*$ и $(\operatorname{Coker} T)^* \cong \operatorname{Ker} T^*$.