9.1. Пусть S — поглощающее множество в векторном пространстве X над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Обозначим через p_S функционал Минковского множества S. Докажите следующие утверждения:

1) $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ для всех $x \in X$, $\lambda \geqslant 0$.
2) Если S выпукло, то $p_S(x+y) \leqslant p_S(x) + p_S(y)$ для всех $x, y \in X$.
3) Если S закруглено, то $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ для всех $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
4) Если S выпукло, то $\{x : p_S(x) < 1\} \subset S \subset \{x : p_S(x) \leqslant 1\}$.

9.2. Докажите, что

1) сумма любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;
2) пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;
3) образ и прообраз выпуклого множества при линейном отображении — выпуклые множества;
4) замыкание и внутренность выпуклого множества в нормированном пространстве — выпуклые множества;
5) аналогичные утверждения справедливы для закругленных множеств.

9.3. Приведите пример двух непересекающихся выпуклых подмножеств в векторном пространстве, не разделенных гиперплоскостью.

9.4. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Докажите, что для любого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

9.5. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

9.6 (*необходимость полноты в теореме Банаха–Штейнгауза*)**.** Приведите пример нормированного пространства X и последовательности функционалов (f_n) в X^*, ограниченной на каждом векторе, но не ограниченной по норме.

9.7. Приведите пример бочки в нормированном пространстве, не содержащей окрестности нуля.

9.8. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, причем X либо Y полно.
1) Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (*Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).
2) Верно ли утверждение из п. 1 без предположения о полноте?

9.9. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны. (*Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).

9.10. 1) Выведите теорему об открытом отображении из теоремы об обратном операторе.
2) Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.

9.11. Докажите, что замкнутое подпространство X_0 банахова пространства X дополняемо (см. листок 8) тогда и только тогда, когда существует такое замкнутое подпространство $X_1 \subset X$, что $X = X_0 \oplus X_1$.

9.12 (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**.** Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

9.13. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует неограниченный линейный функционал.

9.14* (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**.** Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

9.15***.** Приведите пример абсолютно выпуклого поглощающего множества в банаховом пространстве, не содержащего окрестности нуля.

* * *

Следующие задачи этого листка не обязательны для решения, но будут зачтены всем решившим в виде бонусных баллов.

Пусть G — полугруппа. Для любой функции f на G и любого $x \in G$ определим функцию $L_x f$ формулой $(L_x f)(y) = f(xy)$.

Определение 9.1. Полугруппа G называется *аменабельной*, если существует функционал $m \in \ell^\infty(G)^*$ со следующими свойствами:

1) если $f \geqslant 0$, то и $m(f) \geqslant 0$;
2) $m(1) = 1$;
3) для любой $f \in \ell^\infty(G)$ и любого $x \in G$ справедливо равенство $m(L_x f) = m(f)$.

Любой такой функционал m называется *инвариантным средним.*

9.16. Докажите, что любая конечная группа аменабельна.

9.17. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ аменабельна. (*Указание*: воспользуйтесь задачей 7.7.)

9.18. Докажите, что полугруппа $\mathbb{N}$ аменабельна, причем для любого инвариантного среднего m на ℓ^∞ и любой сходящейся числовой последовательности $x = (x_n)$ справедливо равенство $m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Информация к размышлению. Известно, что любая абелева полугруппа аменабельна. С другой стороны, свободная группа с $n > 1$ образующими не аменабельна. Инвариантные средние и аменабельные группы имеют многочисленные приложения в различных областях математики. См. по этому поводу книги Ф. Гринлифа «Инвариантные средние на топологических группах» (М.: Мир, 1973); S. Wagon, "The Banach–Tarski Paradox" (Cambridge Univ. Press, 1985); V. Runde, "Lectures on amenability" (Springer, 2002).