6.1. Постройте унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $L^2[a,b]$ и $L^2[0,1]$.

6.2. Докажите, что ℓ^2-сумма семейства (пред)гильбертовых пространств сама является (пред)-гильбертовым пространством.

6.3. Докажите, что пополнение предгильбертова пространства является гильбертовым пространством.

6.4. 1) Докажите, что факторпространство гильбертова пространства по замкнутому векторному подпространству само является гильбертовым пространством. **2)** Докажите аналогичное утверждение о предгильбертовых пространствах.

6.5. Докажите ортонормированность *тригонометрической системы*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$.

6.6. Докажите ортонормированность *тригонометрической системы* $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Как эта система связана с системой из предыдущей задачи?

6.7. *Система Уолша* — это система функций на $[0,1]$, являющихся конечными произведениями различных функций Радемахера. Докажите, что система Уолша — ортонормированный базис в $L^2[0,1]$.

6.8. *Система Хаара* — это система функций на $[0,1]$, задаваемых формулами

$$\chi_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } \frac{2i-2}{2^{k+1}} \leqslant t < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2} & \text{при } \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leqslant t < \frac{2i}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

($k = 0,1,\ldots;\ i = 1,\ldots,2^k$). Докажите, что система Хаара — ортонормированный базис в $L^2[0,1]$.

6.9. Докажите, что ортонормированная система в сепарабельном предгильбертовом пространстве не более чем счетна.

6.10. Вычислите расстояние от функции $f(t) = e^t$ в $L^2[0,1]$ до подпространства многочленов степени не выше 1.

6.11. Докажите, что пространство $C_c^\infty(a,b)$ гладких функций на интервале (a,b) с компактным носителем плотно в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 6.1. Пусть $f \in L^2[a,b]$. Функция $f' \in L^2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $f \in L^2[a,b]$, если

$$\int_a^b f'\varphi\,dt = -\int_a^b f\varphi'dt$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$.

6.12. Докажите, что если $f \in L^2[a,b]$ обладает обобщенной производной f', то f' единственна (как элемент пространства $L^2[a,b]$).

6.13. *Пространство Соболева* $H^{1,2}(a,b)$ определяется как множество всех $f \in L^2[a,b]$, обладающих обобщенной производной $f' \in L^2[a,b]$. Докажите, что $H^{1,2}(a,b)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b (f\bar{g} + f'\bar{g}')\, dt.$$

6.14. 1) Пусть (e_n) — стандартный ортонормированный базис в пространстве ℓ^2. Положим $x = \sum_n n^{-1} e_n$ и $H_0 = \operatorname{span}\{x, e_2, e_3, \ldots\}$. Покажите, что $(e_2, e_3, \ldots)$ — максимальная ортонормированная система в H_0, не являющаяся тотальной.
2) Докажите, что в любом неполном сепарабельном предгильбертовом пространстве существует максимальная ортонормированная система, не являющаяся тотальной.

6.15. Докажите, что ортонормированная система (e_i) в предгильбертовом пространстве H тотальна тогда и только тогда, когда для каждого $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, e_i \rangle|^2$.

6.16*. 1) Докажите, что все ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве равномощны.
2) Мощность любого ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве называется его *гильбертовой размерностью.* Докажите, что два гильбертовых пространства унитарно изоморфны тогда и только тогда, когда равны их гильбертовы размерности.

6.17. Пусть X — топологическое пространство. Докажите, что точка $x \in X$ принадлежит замыканию подмножества $Y \subset X$ тогда и только тогда, когда в Y существует направленность, сходящаяся к x.

6.18. Докажите, что отображение топологических пространств $f \colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждой сходящейся направленности (x_λ) в X направленность $f(x_\lambda)$ сходится в Y к пределу $f(\lim x_\lambda)$.

6.19. Докажите, что топологическое пространство хаусдорфово тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся направленность в нем имеет только один предел.

6.20. Дайте определение фундаментальной направленности в метрическом пространстве и докажите, что в полном метрическом пространстве каждая фундаментальная направленность сходится.

6.21. Докажите, что семейство $(x_i)_{i \in I}$ в нормированном пространстве X суммируемо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) множество $N = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ не более чем счетно;
2) если N конечно, то $\sum_{i \in N} x_i = x$, а если N счетно, то для любой биекции $\pi \colon \mathbb{N} \to N$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ сходится к x.

6.22. Сформулируйте и докажите критерий Коши суммируемости семейства в банаховом пространстве.