7.1. Напомним (см. лекцию), что если $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то существует изометрический изоморфизм $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$. Следуя той же схеме, постройте изометрические изоморфизмы **1)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **2)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$.

7.2. Обозначим любой из трех изоморфизмов, упомянутых в предыдущей задаче, через α. Когда функционал $F_a = \alpha(a)$ достигает нормы?

7.3. Можно ли тем же способом, что и в задаче 7.1, построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

7.4. Опишите сопряженные к следующим операторам:
1) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
2) оператор правого сдвига в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
3) оператор двустороннего сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$;
4) оператор неопределенного интегрирования в $L^2[0,1]$ (см. задачу 2.10);
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 2.12).

7.5. 1) Докажите, что линейный функционал на нормированном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто. **2)** Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

7.6. Пусть $X = \mathbb{R}^2_p$ — плоскость, снабженная нормой $\|\cdot\|_p$, и пусть $X_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0\colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x,0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует линейных функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

7.7. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство и $x \in X \setminus X_0$. Докажите, что существует такой $f \in X^*$, что $f|_{X_0} = 0$ и $f(x) \neq 0$.

7.8. Пусть X — нормированное пространство.
1) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
2) Верно ли обратное?
3) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

Определение 7.1. Нормированное пространство Y называется *инъективным*, если для любого нормированного пространства X и любого векторного подпространства $X_0 \subset X$ каждый ограниченный линейный оператор $T_0\colon X_0 \to Y$ продолжается до ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$. Если вдобавок существует такое $C > 0$, что оператор T можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\|T\| \leqslant C\|T_0\|$, то Y называется *C-инъективным.*

Из теоремы Хана–Банаха следует, что основное поле $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) 1-инъективно.

7.9. Докажите, что инъективное нормированное пространство полно.

7.10. Докажите, что банахово пространство $\ell^\infty(S)$ 1-инъективно для любого множества S.

7.11. Докажите, что любое нормированное пространство X линейно изометрически вкладывается в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S. (*Указание:* в качестве S можно взять единичный шар пространства X^*.)

7.12. Докажите, что если банахово пространство инъективно, то оно C-инъективно для некоторой константы C.

7.13*. Докажите, что c_0 не изоморфно сопряженному ни к какому нормированному пространству.