Листок 4

Задачи 1 –4 должны быть сданы к 3 декабря.

1. Покажите, что линейная замена переменных $\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, где C - числовая 2×2 матрица, приводит уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{ay+bx}{cy+dx}$ к уравнению того же вида с матрицей коэффициентов, сопряженной исходной, $\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C^{-1}$.

2. Для всех приведенных в этой задаче дифференциальных уравнений
   (1) $y' = \frac{y-2x}{y}$
   (2) $y' = \frac{x+4y}{2x+3y}$
   (3) $y' = \frac{x-2y}{3x-4y}$
   (4) $y' = \frac{2x-y}{x-y}$
   (5) $y' = \frac{y-2x}{2y-3x}$
   а) нарисуйте качественную картину поля направлений и интегральных кривых;
   б) определите тип особой точки
   в) выпишите все решения дифференциального уравнения
   г) согласуйте полученные результаты.

3. Найдите особые точки следующих дифференциальных уравнений и определите их тип:
   (1) $y' = \frac{2y}{x^2-y^2-1}$
   (2) $y' = \frac{x^2+y^2-2}{x-y}$

4. Найти кривую, у которой абсцисса центра тяжести площади, заключенной между прямыми $x = 0,\ y = 0,\ x = a$ и самой кривой, равна $\dfrac{3}{4}a$.

5. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями, делится точкой касания пополам.

6. Найти кривые, у которых треугольник между осью Oy, касательной и радиус-вектором из начала координат в точку касания - равнобедренный.

7. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной, и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a$.

8.* Предъявите дифференциальное уравнение 1 порядка, имеющее одну изолированную особую точку типа седла с заданным наперед количеством сепаратрис.