11.1. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X.
1) Докажите, что ее вариация $|\mu|$ также является мерой.
2) Докажите, что если μ σ-аддитивна, то и $|\mu|$ σ-аддитивна.
3) * Докажите, что если $\mathscr{A}$ — σ-алгебра и μ σ-аддитивна, то μ — мера ограниченной вариации.

11.2. Докажите, что вариация комплексной меры μ на алгебре множеств $\mathscr{A}$ — это наименьшая из всех неотрицательных мер ν на $\mathscr{A}$, удовлетворяющих условию $|\mu(A)| \leqslant \nu(A)$ для всех $A \in \mathscr{A}$.

11.3. Докажите, что пространство $M(\mathscr{A})$ комплексных мер ограниченной вариации на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X является банаховым пространством относительно нормы $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

11.4. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X. Назовем подалгебру $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ *плотной* относительно μ, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $|\mu|(A \triangle B) < \varepsilon$. Докажите, что если $\mathscr{B}$ плотна в $\mathscr{A}$ относительно μ, то для любого $B \in \mathscr{B}$ справедливо равенство $|\mu|(B) = \big|\mu|_{\mathscr{B}}\big|(B)$.

11.5. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X. Восполните детали в построении интеграла по μ как ограниченного линейного функционала на пространстве $B_{\mathscr{A}}(X)$ ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций на X.

11.6. Восполните детали в доказательстве теоремы Хильдебрандта–Канторовича об изометрическом изоморфизме между $M(\mathscr{A})$ и $B_{\mathscr{A}}(X)^*$.

11.7. **1)** Докажите, что каждая функция из $C^1[a,b]$ имеет ограниченную вариацию.
2) Приведите пример непрерывной функции на $[a,b]$ неограниченной вариации.
3) Приведите пример дифференцируемой функции на $[a,b]$ неограниченной вариации.

11.8. Пусть φ — кусочно постоянная функция на $[a,b]$. Как устроена соответствующая ей мера Лебега–Стилтьеса?

11.9. Пусть φ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$, непрерывная справа на (a,b) и такая, что $\varphi(a) = 0$. Пусть μ_φ — соответствующая ей мера Лебега–Стилтьеса. Вычислите (в терминах функции φ) значения μ_φ на всевозможных интервалах, полуинтервалах, отрезках и одноточечных множествах.