

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Вопросы к коллоквиуму за 1 и 2 модули

1. Ограниченные линейные операторы, их эквивалентные определения, ограниченность и непрерывность. Норма ограниченного линейного оператора. Примеры вычисления норм операторов.
2. Ограниченные линейные операторы, их эквивалентные определения, ограниченность и непрерывность. Мажорирование и эквивалентность норм. Эквивалентность норм на конечномерном векторном пространстве.
3. Топологически инъективные и открытые операторы. Изометрии и коизометрии.
4. Факторпространства нормированных пространств. Универсальное свойство факторпространств и его следствия.
5. Банаховы пространства. Примеры. Полнота пространства  $\ell^p$ .
6. Полнота факторпространств и пространств ограниченных линейных операторов. Теорема о продолжении линейных операторов «по непрерывности».
7. Пополнение нормированного пространства. Его существование, универсальное свойство, единственность и функториальность.
8. Полуторалинейные формы. Предгильбертовы пространства: определение и примеры. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Норма на предгильбертовом пространстве. Гильбертовы пространства: определение и примеры.
9. Ортогональное дополнение подмножества в предгильбертовом пространстве. Простейшие свойства ортогональных дополнений. Проекция вектора на подпространство. Единственность проекции и ее интерпретация как ближайшего элемента. Теорема о существовании проекции в гильбертовом пространстве. Теорема об ортогональном дополнении.
10. Ортогональные и ортонормированные системы. Примеры. Коэффициенты Фурье и их свойства. Неравенство Бесселя. Единственность ряда Фурье. Равенство Парсеваля.
11. Ортонормированные базисы, тотальные и максимальные ортонормированные системы, связь между этими понятиями. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве. Его построение в сепарабельном случае с помощью ортогонализации.
12. Теорема о классификации гильбертовых пространств. Теорема Рисса–Фишера.
13. Пространство, сопряженное к нормированному пространству. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Теорема Рисса о сопряженном к гильбертову пространству.
14. Пространство, сопряженное к нормированному пространству. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Пространство, сопряженное к  $\ell^p$ .

15. Теорема Хана–Банаха и ее следствия.
16. Выпуклые, закругленные и поглощающие множества в векторном пространстве. Функционал Минковского. Теоремы об отделении выпуклых множеств гиперплоскостью.
17. Каноническое вложение во второе сопряженное. Его естественность. Рефлексивные банаховы пространства. Примеры.
18. Теорема Бэра. Свойство бочечности банаховых пространств.
19. Теорема Банаха–Штейнгауза и ее следствия.
20. Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике.
21. Аннуляторы, преданнуляторы и их свойства. Совпадение преданнулятора аннулятора подмножества с замыканием его линейной оболочки. Описание сопряженных к подпространствам и к факторпространствам.
22. Двойственность между инъективными операторами и операторами с плотным образом. Двойственность между топологически инъективными и сюръективными операторами.
23. Функции ограниченной вариации на отрезке и их свойства. Функция распределения борелевской меры на отрезке. Описание борелевских мер на отрезке как мер Лебега–Стилтьеса.
24. Теорема Рисса о линейных функционалах на  $C[a, b]$ . Теорема Рисса–Маркова–Какутани (без доказательства).