Дифференцируемые функции

Задача 1. Найдите следующие пределы функций:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(nx)}{1-\cos(mx)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln(x)$, $a \in \mathbb{R}$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$;

g^*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{tg}(x))}{\mathrm{arctg}(\arcsin(x)) - \arcsin(\mathrm{arctg}(x))}$.

Задача 2. a) Докажите, что функция

$$S(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

бесконечное число раз дифференцируема на прямой, причём все её производные в нуле равны нулю.

b) Сохранится ли это свойство для такой же функции комплексной переменной?

Задача 3. Постройте *гладкую* (бесконечное число раз дифференцируемую) функцию, множество нулей которой совпадает с

a) лучём $[0, \infty)$;

Подсказка: воспользуйтесь функцией из предыдущей задачи.

b) отрезком $[0, 1]$;

c) произвольным конечным объединением отрезков и лучей;

d^*) произвольным замкнутым множеством.

Задача 4. a) Докажите, что если функция вещественной переменной f дифференцируема на некотором содержащем x интервале, $f^{(k)}(x) = 0$ для $1 \leqslant k < n$, и $f^{(n)}(x) \neq 0$, то при чётном n в точке x будет локальный экстремум, а при нечётном — нет. Определите по знаку $f^{(n)}(x)$, будет ли он максимумом или минимумом.

Подсказка: определите индукцией по k знаки $f^{(n-k)}$ слева и справа от x.

b) Приведите примеры, показывающие, что при $f^{(k)}(x) = 0$ для всех $k \geqslant 1$ точка x может быть экстремумом, а может и не быть.

Задача 5. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция.

a) Докажите, что если $f^{(n)}$ — нулевая функция, то f — многочлен степени меньше n.

Подсказка: проведите индукцию по n, используя теорему Лагранжа.

b^*) Докажите, что если для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такой $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(x) = 0$, то f — многочлен.

Задача 6*. a^*) Приведите пример дифференцируемой на отрезке функции вещественной переменной, производная которой не является непрерывной.

b^*) Докажите, что тем не менее производная такой функции принимает все промежуточные значения.

Задача 7*. Пусть $P(z)$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной $P'(z)$ в $\mathbb{C}$ лежат в выпуклой оболочке корней $P(z)$ в $\mathbb{C}$.