Алгебра. Листок 7.

◇ **7.1.** *В этой задаче линейное пространство V не обязательно предполагается конечномерным.*
1) Пусть f — идемпотентный оператор на V. Докажите, что $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
2) Пусть $V = U \oplus W$. Докажите, что существует единственный идемпотентный оператор $f : V \to V$, такой что $U = \operatorname{Im} f$, $W = \operatorname{Ker} f$.

◇ **7.2.** *Докажите, что каждое из указанных отображений $f : V \to V$ в себя является идемпотентным линейным оператором и укажите, какое разложение в прямую сумму ему соответствует.*
1) $V = \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ (пространство квадратных $n \times n$ матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$), $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$;
2) $V = \mathbb{K}[t]$ (докажите, что это пространство бесконечномерно!), $f(P(x)) = \frac{1}{2}\left(P(t) + P(-t)\right)$;
3) $V = \mathbb{R}[t]$, $f(P(x)) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n$. (Число n фиксировано, $P^{(n)}(x)$ обозначает n-ую производную многочлена $P(x)$.)
Многочлен $f(P(x))$ называется n-ым многочленом Тейлора для многочлена $P(x)$.

◇ **7.3.** *Пусть $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ — фиксированная диагональная матрица, причем все ее собственные значения различны. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $f : \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ для следующих случаев:*
а) $f(X) = AX$;   б) $f(X) = AX - XA$;   в) $f(X) = A^{-1}XA$ (если $\det A \neq 0$).

◇ **7.4.** *Найдите все собственные значения и размерности собственных подпространств для операторов из предыдущей задачи в случае, когда A — произвольная матрица, имеющая n различных собственных значений.*

◇ **7.5.** *Пусть λ — собственное значение линейного оператора f, $Q(t)$ — некоторый многочлен. Докажите, что $Q(\lambda)$ является собственным значением оператора $Q(f)$.*

◇ **7.6.** *1) Число 4 является собственным значением линейного оператора f^2 над $\mathbb{R}$. Верно ли, что у оператора f одно из чисел 2 или -2 является собственным значением?*
2) Пусть f — линейный оператор над $\mathbb{R}$. Может ли оператор f^2 иметь отрицательные собственные значения?

◇ **7.7.** *Приведите пример линейного оператора в $\mathbb{R}^4$, имеющего единственное инвариантное подпространство, причем размерность этого подпространства равна 2.*

◇ **7.8.** *Рассмотрим оператор дифференцирования на (бесконечномерном) линейном пространстве всех определенных на $\mathbb{R}$ функций, которые можно продифференцировать любое число раз. Найдите в этом пространстве конечномерное инвариантное подпространство, при ограничении на которое оператор дифференцирования*
а) будет иметь заданные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$;
б) не будет иметь вещественных собственных значений.

◇ **7.9.** *а) Докажите, что множество S всех последовательностей комплексных чисел (т.е. $S = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots), \quad z_i \in \mathbb{C}\}$) является линейным пространством над $\mathbb{C}$. Докажите, что это линейное пространство не является конечномерным.*
б) Придумайте пример линейного оператора на S, не имеющего ни одного собственного вектора.
в) Придумайте пример обратимого линейного оператора на S, не имеющего ни одного собственного вектора.

◇ **7.10.** *Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора в $\mathbb{C}^n$, матрица которого имеет вид $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } j - i \equiv 1 \pmod{n} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ (см. задачу 5.5е)*
а) для $n = 3$;   б) для произвольного n.

◇ **7.11.** *Решите предыдущую задачу для $n = 3$ а) над полем $\mathbb{F}_2$;   б)над полем $\mathbb{F}_7$.*

◇ **7.12.** *Пусть* U *— подпространство конечномерного линейного пространства* V, $v_1, v_2, \dots v_k \in V$. *Рассмотрим смежные классы* $\bar{v}_i = v_i + U \in V/U$.
а) Верно ли, что если векторы $v_1, v_2, \dots v_k$ *линейно независимы, то смежные классы* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k$ *тоже линейно независимы?*
б) Верно ли, что если смежные классы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k$ *линейно независимы, то векторы* $v_1, v_2, \dots v_k$ *тоже линейно независимы?*
в) Докажите, что $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

◇ **7.13.** *Пусть* f *— линейный оператор на конечномерном пространстве* V, *а* U *— инвариантное подпространство. Рассмотрим отображение* $\bar{f} : V/U \to V/U$, *заданное формулой* $\bar{f}(v+U) = f(v) + U$. *Поставьте между следующими парами утверждений один из знаков "$\Leftrightarrow$", "$\Rightarrow$" "$\Leftarrow$" (и докажите, что получились верные теоремы).*
а) "оператор f *ненулевой" и "оператор* $\bar{f}$ *ненулевой";*
б) "оператор f *обратим" и "оператор* $\bar{f}$ *обратим";*
в)"оператор f *нильпотентен" и "оператор* $\bar{f}$ *нильпотентен";*
г) $\operatorname{Ker} f \subset U$ *и "оператор* $\bar{f}$ *обратим".*

◇ **7.14.** *Пусть* f *— линейный оператор на конечномерном пространстве* V.
а) Докажите, что если характеристический многочлен оператора f *неприводим, то* f *не имеет инвариантных подпространств, кроме* $\{0\}$ *и* V.
б) Докажите, что если* f *не имеет инвариантных подпространств, кроме* $\{0\}$ *и* V, *то характеристический многочлен оператора* f *неприводим.*
в) Останется ли верным утверждение "а", если в его формулировке характеристический многочлен заменить на минимальный?*
г) Останется ли верным утверждение "б", если в его формулировке характеристический многочлен заменить на минимальный?*

◇ **7.15.** *Линейный оператор в конечномерном пространстве над* $\mathbb{C}$ *имеет единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор. Докажите, что в подходящем базисе матрица этого оператора — жорданова клетка.*

◇ **7.16.** *1) Докажите, что характеристический многочлен нильпотентного оператора есть* t^n, *где* n *— размерность пространства.*
2) Докажите, что характеристический многочлен нильпотентного оператора совпадает с его минимальным многочленом тогда и только тогда, когда его матрицей в подходящем базисе является жорданова клетка.

◇ **7.17.** *Каким может быть минимальный многочлен и жорданово разложение такого нильпотентного линейного оператора* f *в* $\mathbb{R}^8$, *что*
а) $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 4$? *б)* $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f^3 = 5$? *в)* $\dim \operatorname{Ker} f = 5$?
Для каждого случая приведите пример такого оператора.

◇ **7.18.** *Рассмотрим конечную строго возрастающую последовательность натуральных чисел* $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k < n$. *Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовал нильпотентный оператор* f *на* n*-мерном линейном пространстве, такой что* $d_m = \dim \operatorname{Ker} f^m$.

◇ **7.19.** *а) Пусть линейные операторы* f *и* g *над* $\mathbb{C}$ *коммутируют (т.е.* $f \circ g = g \circ f$*). Докажите, что у* f *и* g *имеется общий собственный вектор.*
*б)**Докажите, что если два линейные оператора* f *и* g *над* $\mathbb{C}$ *таковы, что* $\operatorname{rank}(f \circ g - g \circ f) \le 1$, *то у* f *и* g *имеется общий собственный вектор.*

◇ **7.20.** *Рассмотрим линейное пространство* $\mathcal{P}_n = \{P(t) \in \mathbb{R}[t], \quad \deg P \le n\}$ *многочленов степени не выше* n *и оператор первой разности* $\Delta : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ *(напомним, что, по определению,* $\Delta(P(t)) = P(t+1) - P(t)$*). Найдите жорданову форму и жорданов базис для оператора* Δ.

◇ **7.21.** *Докажите, что следующие три свойства линейного оператора* f *равносильны:*
1) минимальный многочлен совпадает с характеристическим;
2) каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка;
3) любой оператор, перестановочный с f, *является линейной комбинацией степеней* f.