Вопросы к коллоквиуму по алгебре

Приводимые ниже вопросы не есть буквально те вопросы, которые будут в билетах, но всё, что в совокупности будет в билетах, перечислено ниже в дословно тех же формулировках, что будут в билетах (мы постараемся сделать все вопросы на коллоквиуме имеющими равную трудоёмкость, а в этом списке мы разбили вопросы на группы, близкие по смыслу, а не по трудоёмкости). Вопросы 3, 18, 19, 20 следует воспринимать, скорее, как образцы задач. Надо ожидать также задачи типа: сколько ожерелий можно составить из 8 бусин 10 возможных цветов? существует ли неабелева группа порядка 51? разложите на неприводимые представление собственной группы тетраэдра на множестве функций на рёбрах и т. п.

Вопрос 1. Действие группы на множестве. Разбиение на орбиты. Формула для длины орбиты конечной группы. Формула Полиа – Бернсайда для количества орбит конечной группы.

Вопрос 2. Теорема о неподвижной точке p-группы. Нетривиальность центра p-группы. Группа порядка p^2 абелева. Теоремы Силова: в группе порядка $p^n m$ (где $\text{НОД}(p,m)=1$ и p простое) силовские p-подгруппы существуют и все сопряжены, любая p-подгруппа содержится в силовской, а число силовских подгрупп делит m и сравнимо с 1 по модулю p.

Вопрос 3. Полупрямые произведения. Описание всех групп порядка $\leqslant 15$.

Вопрос 4. Оператор диагонализуем над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, раскладывающимся над $\Bbbk$ на различные линейные множители. Операторы, составляющие конечную группу, все диагонализуемы (над алгебраически замкнутым полем).

Вопрос 5. Любое множество коммутирующих операторов имеет общий собственный вектор, а полупростых коммутирующих операторов — общий базис, в котором все они диагональны. Описание линейных представлений конечных абелевых групп.

Вопрос 6. Характеризации полупростоты: полная приводимость $\iff$ линейная порождённость простыми подмодулями $\iff$ наличие у каждого подмодуля дополнительного подмодуля $\iff$ наличие инвариантного проектора на каждый подмодуль.

Вопрос 7. Теорема плотности (double commutator theorem): $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_A(V)}(V)=A$ если V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A\subset\mathrm{End}(V)$.

Вопрос 8. Лемма Шура. Теорема Бернсайда: если V неприводимо над алгебраически замкнутым полем над множеством операторов $R\subset\mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка этих операторов равна $\mathrm{End}(V)$.

Вопрос 9. Проектор на неподвижные векторы представления конечной группы. Полная приводимость представлений конечной группы.

Вопрос 10. Свойства разложений представлений на неприводимые: независимость кратностей $m_\lambda(V)$ неприводимых компонент λ от способа разложения V на неприводимые, инвариантная характеризация изотипных подмодулей $V_\lambda\subset V$, образ изотипного подмодуля при гомоморфизме представлений содержится в изотипном подмодуле того же типа.

Вопрос 11. Разложение групповой алгебры $\Bbbk[G]$ в прямую сумму изотипных двусторонних идеалов. Теорема Машке: отображение $\Bbbk[G]\longrightarrow\bigoplus\limits_{U\in\mathrm{Irr}(G)}\mathrm{End}(U)$, сопоставляющее элементу набор операторов, которыми он действует во всех неприводимых представлениях, является изоморфизмом. Следствие: $\sum\limits_{U\in\mathrm{Irr}(G)}\dim^2 U=|G|$.

Вопрос 12. Описание центра групповой алгебры $\Bbbk[G]$. Число неприводимых представлений равно числу классов сопряжённости $\mathrm{cl}(G)$.

Вопрос 13. Скалярное произведение на групповой алгебре $\Bbbk[G]$ (след композиции в левом регулярном представлении) и его матрица Грама в базисе из элементов группы. Формула Планшереля: $(f,g)=\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)}\dim(U_\lambda)\cdot\mathrm{tr}\big(\lambda(fg)\big)$.

Вопрос 14. Неприводимые идемпотенты (инвариантные проекторы на изотипные подмодули) в $\Bbbk[G]$, их таблица умножения и их матрица Грама. Выражение неприводимых идемпотентов через элементы группы.

Вопрос 15. Скалярное произведение на пространстве функций на группе. Характеры составляют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённости.

Вопрос 16. Вычисление характеров: характеры суммы, тензорного произведения, симметрических и внешних степеней, характер двойственного представления, характер $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Вопрос 17. Использование характеров для описания представлений: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$, U неприводимо $\iff (\chi_U, \chi_U) = 1$, $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.

Вопрос 18. Описание неприводимых представлений групп D_n и их характеров.

Вопрос 19. Описание неприводимых представлений групп S_n с $n \leqslant 5$ и их характеров.

Вопрос 20. Описание неприводимых представлений групп A_n с $n \leqslant 5$ и их характеров.