Логика и алгоритмы -2010. Задание 9

120. Запишите следующие высказывания в виде формул сигнатуры теории множеств (с предикатными символами $\in$, $=$).

а) $z = (x,y)$

б) $x = y\times z$

в) z - отношение между множествами x и y.

г) z - отображение множества x в множество y.

д) множества x и y равномощны.

121. Запишите следующие высказывания в виде формул в подходящей сигнатуре.

а) Все гуси и утки летают и плавают.

б) Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

в) Дети катаются на велосипедах.

г) Последовательность $(1/n^2)$ сходится к нулю.

д) Функция $(1/x)$ не имеет конечного предела при $x\to 0$.

122. Приведите следующие формулы 1-го порядка к предваренной нормальной форме:

а) $\forall x\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y\forall x P(x,y)$

б) $\neg\forall y(P(x) \Rightarrow (x=y \vee \exists x\, Q(x,y)))$

123. Пусть F - конечное поле, φ - формула сигнатуры $(=, +, \cdot, 0, 1)$. Индукцией по длине φ докажите, что существует бескванторная формула ψ той же сигнатуры, которая эквивалентна φ в F, т.е. $F \vDash \overline{\forall}(\varphi \Leftrightarrow \psi)$.

124. Выполнимы ли следующие формулы?

а) $\forall x\exists y P(x,y) \wedge \neg \exists y\forall x P(x,y)$

б) $\neg\exists y\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$

в) $\exists x\forall y\, (P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$

125. Общезначимы ли следующие формулы?

а) $\exists y\forall x P(x,y) \Rightarrow \forall x\exists y P(x,y)$

б) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

в) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

г) $\exists x\forall y\, [(P(x,y) \wedge \neg P(y,x)) \Rightarrow (P(x,x) \Leftrightarrow P(y,y))]$

126. Среди следующих формул найдите все пары эквивалентных:

(1) $\forall x\, \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y))$;

(2) $\forall x\, \exists y(P(x) \Rightarrow Q(y))$;

(3) $\exists y\, \forall x(P(x) \Rightarrow Q(y))$,

(4) $\forall y\, \exists x(P(x) \Rightarrow Q(y))$;

(5) $\exists x\, \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y))$;

(6) $\exists x\, \exists y(P(x) \Rightarrow Q(y))$.

127. Докажите, что следующая формула ложна во всякой конечной интерпретации, но выполнима в бесконечной:

$\forall x\neg P(x,x) \wedge\forall x\forall y\forall z\, [\, (P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z))] \wedge \forall x\exists y P(x,y)$

128. Докажите, что следующие формулы истинны во всякой конечной интерпретации, но не общезначимы:

а) $\forall x\, \forall y\, \forall z(R(x, x) \wedge (R(x, z) \Rightarrow (R(x, y) \vee R(y, z)))) \Rightarrow \exists x\, \forall y R(x, y)$,

б) $\exists x\, \forall y\, \exists z((Q(y, z) \Rightarrow Q(x, z)) \Rightarrow (Q(x, x) \Rightarrow Q(y, x)))$.

129. Может ли теория 1-го порядка иметь модели мощности 2 и 4, но не иметь моделей мощности 3?
130. Постройте непротиворечивую теорию 1-го порядка, не имеющую конечных моделей.

Определение Теория 1-го порядка T называется *полной*, если для любой замкнутой формулы φ в ее сигнатуре $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \neg\varphi$. (Противоречивая теория также считается полной.) Теории в одной сигнатуре называются *эквивалентными,* если в них доказуемы одни и те же теоремы.
Определение Пусть M - интерпретация сигнатуры Ω. Множество всех замкнутых формул сигнатуры Ω, истинных в M, называется *элементарной теорией* для M и обозначается Th(M).
Определение Две интерпретации одной сигнатуры называются *элементарно эквивалентными*, если их элементарные теории совпадают.

131. Докажите, что непротиворечивая теория T полна тогда и только тогда, когда всякая содержащая ее теория той же сигнатуры либо эквивалентна T, либо противоречива.
132. Докажите, что всякая теория вида Th(M) полна.
133. Докажите, что теория 1-го порядка полна тогда и только тогда, когда все ее модели элементарно эквивалентны.
134. Докажите, что теория всех бесконечных абелевых групп в сигнатуре (+, 0, =) неполна.
135. Докажите, что теория всех полей нулевой характеристики в сигнатуре (=, +, · ,0, 1) неполна.
136. Докажите, что не существует теории 1-го порядка в сигнатуре (+,0,=), моделями которой являются в точности все конечные циклические группы.
137. Докажите, что не существует теории 1-го порядка в сигнатуре (=, +, · ,0, 1), моделями которой являются в точности все поля конечной характеристики.