Листок 6

Задачи 1,3,5 и 7 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Найдите огибающую:
   (1) отрезков постоянной длины, скользящих по сторонам прямого угла (сравните с задачей 2, листок 5);
   (2) прямых, отсекающих из первого квадранта треугольник постоянной площади (сравните с задачей 8, листок 5);
   (3) траекторий снаряда, выпущенного с данной точки поверхности земли с данной начальной скоростью v_0 (кривая безопасности). Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Пусть семейство кривых на плоскости задано параметрически: $x = X(t, C), y = Y(t, C)$. Здесь t - параметр на кривой; C - параметр кривой. Докажите, что огибающая этого семейства получается исключением C из системы уравнений, полученных добавлением к исходным соотношениям уравнения $\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial C} - \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial C} = 0$.

Эволюта кривой определяется как множество центров кривизны кривой. Эквивалентное определение: эволюта - огибающая семейства нормалей.

3. Докажите, что эволюта эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ есть кривая $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$, полученная из астроиды растяжениями по осям координат.

4. Найдите эволюту
   (1) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
   (2) циклоиды $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$.

Опишите ответы в геометрических терминах.

Эвольвента (или развертка) плоской кривой получается разматыванием нити, натянутой на кривую (таким образом, для каждой плоской кривой имеется однопараметрическое семейство ее эвольвент). Из определения следует, что нормаль к эвольвенте, проведенная в произвольной ее точке, совпадает с некоторой касательной к исходной кривой, так что эвольвента ортогональна семейству касательных к кривой.

5. Выпишите дифференциальные уравнения эвольвент и сами эвольвенты
   (1) окружности $x^2 + y^2 = 1$
   (2) циклоиды $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$. Покажите, что одна из эвольвент - также циклоида.

6. Докажите, что дифференциальное уравнение, описывающее семейство эвольвент плоской кривой, представляет собой некоторое уравнение Лагранжа $y = A(y')x + B(y')$, и потому может быть разрешено в квадратурах.

7. Решите уравнения, понизив их порядок.
   (1) $y^2y'' = 1$;
   (2) $xy'' = y' \log \frac{y'}{x}$;
   (3) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$;
   (4) $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$