

Листок №9

Выпуклые конусы и выпуклые фигуры

C – выпуклый конус, C^\vee – двойственный конус, $\text{Conv} M$ – выпуклая оболочка M .

1. Система линейных неравенств $a_i x + b_i \leq 0$, $i = 1, \dots, s$ несовместна тогда и только тогда, когда некоторая неотрицательная линейная комбинация этих неравенств есть неравенство вида $0 \cdot x + d \leq 0$, $d > 0$. Доказать.

2. Доказать, что

а) $C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_2^\vee \subset C_1^\vee$;

б) $(C_1 + C_2)^\vee = C_1^\vee \cap C_2^\vee$;

в) $(C_1^\vee + C_2^\vee) \subset (C_1 \cap C_2)^\vee$;

г) $C \subset (C^\vee)^\vee$.

3. Показать, что любой выпуклый конус конечного типа на плоскости есть "угол".

4. Выпуклая оболочка множества M , $M \subset A^d$, совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций его точек.

5. Пусть $M = (x_1, \dots, x_s)$ – аффинно зависимое семейство точек в A^d . Тогда в M найдутся такие подмножества M_1 и M_2 , что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ и $\text{Conv} M_1 \cap \text{Conv} M_2 \neq \emptyset$.

6. (Лемма Радона) Если $M = \{x_1, \dots, x_s\}$ – конечное множество точек в A^d и $n \geq d + 2$, то существуют такие подмножества M_1 и M_2 , что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ и $\text{Conv} M_1 \cap \text{Conv} M_2 \neq \emptyset$.

7. (Теорема Хелли = лемма Радона + индукция). Если в аффинном пространстве A^d имеется конечное число n выпуклых фигур, причем $n \geq d + 1$, и любые $(d + 1)$ из них имеют общую точку, то и все они имеют общую точку. (Замечание: теорема верна и для бесконечного числа выпуклых фигур, если все они замкнуты и, по крайней мере, одна из них ограничена).

8. Если M – выпуклый многогранник, а x – точка, ему не принадлежащая, то ближайшая к x точка многогранника M единственна. Доказать. Вывести отсюда, что точку x можно строго отделить от многогранника M .

9. Докажите, что ограниченный многогранник в аффинном пространстве есть выпуклая оболочка его вершин.

10. Пусть v_1, \dots, v_n – семейство попарно различных точек аффинного пространства. Докажите, что существует такая линейная функция f , которая разделяет точки семейства, т.е. $f(v_i) \neq f(v_j)$, если $i \neq j$.