

Листок 8

Конусы (выпуклые)

· Конус C называется острым, если из $x \in C$ ($x \neq 0$) следует $-x \notin C$.

1. Доказать, что множество $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 - \sum_2^n x_i^2 \geq 0, x_1 \geq 0\}$ является конусом.

2. Верно ли, что замыкание конуса является конусом?

3. Доказать, что среди линейных подпространств L , содержащихся в конусе C , существует наибольшее.

· · Оно называется линейной частью конуса C .

4. Каждый конус представим в виде суммы своей линейной части и некоторого острого конуса.

5. Для того, чтобы конус был острым необходимо и достаточно, чтобы его линейная часть равнялась нулю.

· · · Конус, представимый в виде конечного числа полупрямых, называется конечным.

6. Доказать, что конус из задачи 1 таковым не является, если $n > 2$.

7. Конечно ли открытое полупространство? А замкнутое?

· · · · Любое множество векторов $\{b_1, \dots, b_s\}$, неотрицательная линейная оболочка которых совпадает с конусом C , называется его системой образующих. Минимальная (по числу векторов) система образующих называется базисом, а число векторов в базисе – рангом $\text{rk } C$ конуса.

8. Доказать, что все базисы конуса содержат одинаковое число векторов.

9. Вычислить ранг линейного пространства, рассматриваемого как конус, а также ранг его замкнутого полупространства.

10. Доказать, что

1) сумма конечного числа конечных конусов есть конечный конус

2) пересечение конечного числа конечных конусов есть конечный конус.

11. Если φ – линейное преобразование, а C – конечный конус, то $\varphi(C)$ – конечный конус, и $\text{rk } \varphi(C) \leq \text{rk } C$.

· · · · Вектор $x_0 \in C$ ($x_0 \neq 0$) называется краиним вектором конуса C , если его нельзя представить в виде $x_0 = x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 – линейно-независимые векторы из C .

12. Конечный острый конус C есть неотрицательная линейная оболочка множества своих крайних векторов.

При этом его ранг равен максимальному числу положительно линейно-независимых крайних векторов конуса C .

13. Найти (какой-нибудь) базис для конуса решений системы линейных однородных неравенств

$$\begin{cases} x + y - z \leq 0 \\ x - 2y + 2z \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

14. Найти (какой-нибудь) базис конуса неотрицательных решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad (**)$$

15. Обладает ли конечной системой образующих полугруппа всех целочисленных решений системы (*)?

Неотрицательных целых решений системы (**)?