10. КОГОМОЛОГИИ И ИНДЕКС ПЕРЕСЕЧЕНИЯ.

1. Теория

Задача 1. Пусть X — компактное клеточное пространство, F — поле. Докажите, что векторные пространства (над полем F) $H_i(X,F)$ и $H^i(X,F)$ двойственны друг другу (и, следовательно, имеют одинаковую размерность).

Задача 2. Пусть X и Y — компактные клеточные пространства, Докажите, что кольцо $H^*(X \times Y, \mathbb{Z})$ изоморфно кольцу $H^*(X,\mathbb{Z}) \times H^*(Y,\mathbb{Z})$.

2. Примеры

Задача 3. а) Вычислите группы когомологий $H^i(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})$ и $H^i(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ при всех i. б) Рассмотрим стандартное клеточное разбиение $\mathbb{R}P^2$. Докажите, что $M = \mathrm{sk}_1(\mathbb{R}P^2)$ является гладким многообразием. Вычислите класс $\check{M} \in H^1(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})$, двойственный к M по Пуанкаре. в) Вычислите индекс пересечения M с собой. Опишите умножение в кольцах $H^*(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})$ и $H^*(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Задача 4. а) Вычислите группы когомологий $H^i(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Z})$ при всех i. б) Пусть $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор, а $A^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — его овеществление (т.е. тот же самый оператор, но $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ рассматривается теперь как векторное пространство над $\mathbb{R}$). Докажите, что $\det A^{\mathbb{R}} = |\det A|^2$. в) Для произвольного однородного многочлена P от трех переменных обозначим $M_P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{[x:y:z] \in \mathbb{C}P^2 \mid P(x,y,z) = 0\}$. Пусть P и Q таковы, что M_P и M_Q — гладкие кривые и пересекаются трансверсально в k точках. Докажите, что индекс пересечения M_P и M_Q равен k. г) Пусть $P(x,y,z)$ — линейная функция. Докажите, что многообразие M_P (проективная прямая) двойствнно по Пуанкаре образующей в $H^2(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Z})$. д) Пусть Q — однородный многочлен степени d от трех переменных такой, что M_Q — гладкая кривая. Вычислите индекс пересечения M_P и M_Q. Опишите умножение в кольце $H^*(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Z})$ и найдите класс $\check{Q} \in H^2(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Z})$, двойственный M_Q по Пуанкаре. е) Пусть Q_1, Q_2 — однородные многочлены степеней d_1 и d_2 от трех переменных такие, что M_{Q_1} и M_{Q_2} — гладкие кривые, пересекающиеся трансверсально. Найдите число точек пересечения кривых.

Задача 5. а) Вычислите группы когомологий $H^i(S^1 \vee S^2,\mathbb{Z})$ при всех i. б) Пусть $f : S^1 \vee S^2 \to S^1$ — отображение, являющееся гомеоморфизмом на $S^1 \subset S^1 \vee S^2$ и переводящее $S^2 \subset S^1 \vee S^2$ в точку. Докажите, что гомоморфизм $f^* : H^1(S^1,\mathbb{Z}) \to H^1(S^1 \vee S^2,\mathbb{Z})$ — инъекция. в) Опишите умножение в кольце $H^*(S^1 \vee S^2,\mathbb{Z})$. г) Пусть $f : S^1 \vee S^1 \vee S^2 \to S^1 \times S^1$ — отображение, переводящее $S^1 \vee S^1$ гомеоморфно в объединение параллели и меридиана тора, а S^2 в точку. Докажите, что $f^* : H^1(S^1 \times S^1) \to H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^2)$ — инъекция. д) Опишите кольцо $H^*(S^1 \vee S^1 \vee S^2,\mathbb{Z})$.

3. Упражнения

Задача 6. Для перечисленных ниже многообразий вычислите кольцо когомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, если многообразие ориентируемо, и с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, если нет). Укажите подмногообразия, двойственные по Пуанкаре к базису в когомологиях, и проверьте, что пересечение этих многообразий соответствует умножению в когомологиях. а) S^n; б) сфера с g ручками; в) бутылка Клейна; г) $\mathbb{T}^n$; д) $\mathbb{R}P^n$; е) $\mathbb{C}P^n$; ж) $G(2,4)$.

Задача 7. Для перечисленных ниже топологических пространств вычислите кольцо когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$: а) S^2 с k дырками; б) ручка (тор $\mathbb{T}^2$ с дыркой); в) $S^3 \setminus K$, где K — стандартно вложенная в $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ окружность; г) $S^3 \setminus K$, где K — вложенный в $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ узел “трилистник”; д) $\Sigma\mathbb{T}^2$ — надстройка над двумерным тором.

4. Приложения: индекс пересечения

Задача 8 (задача о возах)**.** Из города A в город B ведут две дороги. Два автомобиля проехали из A в B каждый по своей дороге, будучи связанными друг с другом тросом длиной 10 м. Докажите, что два круглых воза диаметром 10 м, один из которых едет из A в B, а другой из B в A, разъехаться не смогут.

Задача 9. Пусть $K_{3,3}$ — граф “три дома, три колодца” (две тройки вершин, каждая вершина первой тройки соединена ребром с каждой вершиной второй тройки), а $f : K_{3,3} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, гладкое на ребрах и такое, что образы ребер пересекаются трансверсально, а образы вершин не лежат на образах внутренностей ребер. Докажите, что общее количество точек пересечения всех пар несмежных (не имеющих общих вершин) ребер нечетно. Отсюда, в частности, следует, что граф $K_{3,3}$ нельзя нарисовать на плоскости без пересечений ребер.

5. Нечетные отображения сфер и другие приложения

Задача 10. а) Пусть $f : S^n \to \mathbb{R}$ — гладкая нечетная функция, для которой 0 — регулярное значение, и пусть $M = f^{-1}(0)$. Докажите, что образ $p(M)$ многообразия M при стандартной проекции $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ представляет нетривиальный элемент в $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. б) Пусть $f_1, \dots, f_{n-1} : S^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные нечетные функции. Докажите, что на S^n существует точка, где они все принимают значение 0. в) Докажите, что не существует непрерывного нечетного отображения $S^n \to S^{n-1}$.

Указание. В пункте 10б предположите сначала, что все функции f_i удовлетворяют условиям пункта 10а, а затем приблизьте произвольные функции f_i такими.

Задача 11. Докажите, что степень нечетного отображения $f : S^n \to S^n$ нечетна.

Задача 12. а) Докажите, что проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ нельзя представить в виде объединения двух открытых подмножеств (пересекающихся), гомеоморфных кругам, но можно представить в виде объединения трех таких подмножеств. б) Сформулируйте и докажите аналогичный результат для $\mathbb{R}P^n$.