

Вопросы к экзамену по курсу "Логика и алгоритмы" (декабрь 2010)

1. Булевы термы. Преобразование булевых термов в пропозициональные формулы. Тождественное равенство булевых термов. Теорема: булевы термы тождественно равны тогда и только тогда, когда соответствующие им формулы эквивалентны.
 2. Приведение булевых термов к СДНФ и СКНФ.
 3. Неупорядоченная пара. Упорядоченная пара. Прямое (декартово) произведение множеств. Кортжи. Произведение нескольких множеств.
 4. Бинарное отношение между множествами. Функциональное отношение. Первая и вторая проекции отношения. Соответствие между множествами. Частичная функция. Область определения частичной функции. Функция (отображение).
 5. Обратное отношение. Обратное соответствие. Инъекция (вложение). Сюръекция (наложение). Биекция (1-1 соответствие). Тождественное отображение.
 6. Композиция функций. Сохранение инъективности, сюръективности, биективности для композиций.
 7. Задача. Если $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow B$, $fg=1_A$, $gf=1_B$, то f, g — взаимно обратные биекции.
 8. Равномощные (эквивалентные) множества. Свойства:
(1) $A \sim A$; (2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$; (3) $A \sim B \ \& \ B \sim C \Rightarrow A \sim C$.
 9. Множество натуральных чисел. Принцип индукции. Определение арифметических операций по индукции. Принцип наименьшего числа.
 10. Конечные множества. Сохранение конечности при добавлении или удалении одного элемента.
 11. Принцип Дирихле. Мощность конечного множества.
 12. Мощность подмножества конечного множества.
 13. Мощность объединения двух непересекающихся конечных множеств. Формула включений и исключений для двух конечных множеств.
 14. Задача: мощность прямого произведения конечных множеств равна произведению мощностей.
 15. Вложимость множеств. Свойства:
(1) $A \lesssim A$; (2) $A \lesssim B \ \& \ B \lesssim C \Rightarrow A \lesssim C$.
- Теорема Кантора — Бернштейна (*Доказательство знать необязательно.)
16. Теорема: если B конечно и $A \lesssim B$, то A конечно.
 17. Теорема: для конечных множеств $A \lesssim B \Leftrightarrow |A| \leq |B|$.
 18. Образ (область значений) отображения. Образ множества при отображении. Сужение отображения на подмножество области определения. Сохранение инъективности для сужений. Задача: образ конечного множества при любом отображении — конечное множество.
 19. Счетные множества. Вложимость конечных множеств в счетные.
 20. Счетность бесконечных подмножеств \mathbf{N} . Счетность бесконечных подмножеств счетного множества.
 21. Равномощность \mathbf{N} и \mathbf{Z} . Счетность объединения счетного и не более чем счетного множества.

22. Задача: если $A \sim A'$ & $B \sim B'$, то $A \times B \sim A' \times B'$. Счетность произведения двух счетных множеств.
23. Операция возведения в степень для множеств. Множества $A^{\{x\}}$, A^{\emptyset} . Два определения множества A^n . Теорема: $A^{\{1, \dots, n\}} \sim A \times \dots \times A$ (n раз).
24. Теорема: если $B \sim C$, то $A^B \sim A^C$. Задача: если $A \sim C$, то $A^B \sim C^B$.
25. Мощность множества A^B для конечных A и B .
26. Множество конечных последовательностей A^* ; его счетность для счетного A .
27. Множества 2^A и $\mathcal{P}(A)$; их равномощность.
28. Вложимость A в $\mathcal{P}(A)$. Мощность множества $\mathcal{P}(A)$ для конечного A .
29. Теорема Кантора о неравномощности A и $\mathcal{P}(A)$. Следствие: не существует множества наибольшей мощности.
30. Равномощность \mathbf{R} и $2^{\mathbf{N}}$. Мощность континуума.
31. Равномощность $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ и $2^{\mathbf{N}}$.
32. Гильбертовское исчисление высказываний CL. Теорема корректности для CL. Теорема полноты для CL (без доказательства).
33. Секвенциальное исчисление высказываний SC. Его связь с исчислением CL.
37. Общезначимые секвенции. Теорема корректности для исчисления SC.
34. Теорема полноты для исчисления SC.
35. Сигнатура. Термы и формулы 1-го порядка. Свободные и связанные переменные.
36. Интерпретация сигнатуры. Оцененные формулы. Индуктивное определение истинности оцененной формулы в интерпретации. Выполнимые формулы. Общезначимые формулы.
37. Исчисление предикатов 1-го порядка CL1. Теоремы корректности и полноты (без доказательства).
38. Исчисление предикатов 1-го порядка с равенством; теоремы корректности и полноты (без доказательства).
39. Эквивалентные формулы 1-го порядка. Предваренная нормальная формула. Теорема о приведении любой формулы к предваренной нормальной форме.
40. Теории 1-го порядка. Противоречивость и непротиворечивость. Доказуемость любой формулы в противоречивой теории.
41. Теорема о дедукции для теорий 1-го порядка.
42. Логическое следование. Теорема корректности для теорий 1-го порядка (без равенства и с равенством). Непротиворечивость выполнимых теорий.
43. Усиленная форма теоремы Гёделя о полноте: выполнимость непротиворечивых теорий 1-го порядка. Равносильность выводимости и логического следования.
44. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности для теорий 1-го порядка.
45. Примеры теорий 1-го порядка: теория графов; теория частично упорядоченных множеств; теория линейно упорядоченных множеств; арифметика Пеано. Существование нестандартных моделей арифметики Пеано.
46. Аксиоматика теории множеств Цермело — Френкеля (ZF). Определение натуральных чисел в ZF.
47. Аксиома выбора. Следствие: образ отображения вкладывается в его источник.
48. Фактормножество по отношению эквивалентности. Вложимость A/R в A .

49. Построение счетного подмножества в бесконечном множестве.
50. Объединение счетного множества счетных множеств.
51. Полный порядок. Примеры вполне упорядоченных множеств. Начальный отрезок вполне упорядоченного множества. Теорема Кантора о сравнении вполне упорядоченных множеств (доказательство знать необязательно).
52. Цепь в частично упорядоченном множестве. Максимальный элемент. Наибольший элемент. Верхняя грань. Индуктивное частично упорядоченное множество. Лемма Цорна.
53. Теорема Цермело.
54. Машины Тьюринга. Вычислимые (частичные) функции. Примеры вычислимых функций. Тезис Чёрча — Тьюринга.
55. Разрешимые множества натуральных чисел. Булевы операции над разрешимыми множествами.
56. Перечислимые множества натуральных чисел. Перечислимость разрешимых множеств. Теорема Поста.
57. Построение перечислимого неразрешимого множества (идея доказательства).