12.1. Докажите σ-аддитивность меры Лебега–Стилтьеса на алгебре подмножеств отрезка $[a, b]$, порожденной отрезками $[a, t]$ $(a < t \leqslant b)$.

12.2. Для каждого из следующих функционалов f на пространстве $C[-1, 1]$ опишите соответствующую меру $\mu \in M[-1, 1]$ и функцию ограниченной вариации $\varphi \in BV_0[-1, 1]$. Вычислите вариацию $V_{-1}^{1}(\varphi)$ и убедитесь, что она равна $\|f\|$.

1) $f(x) = x(-1)$;
2) $f(x) = x(-1/2) + 2x(0) + 3x(1/2)$;
3) $f(x) = x(-1/2) - x(1/2)$;
4) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t x(t)\, dt$;
5) $f(x) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t)\, dt$;
6) $f(x) = x(-1) - 2\int\limits_{-1}^{1} x(t)\, dt + 3x(0)$.

12.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Зафиксируем $f \in L^1(X, \mu)$ и определим меру ν_f (на той же σ-алгебре, что и μ) формулой

$$\nu_f(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x).$$

Докажите, что $\|\nu_f\| = \|f\|_1$.

12.4. Пусть $y \in L^1[a, b]$, $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ и $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Вычислите норму функционала f на $C[a, b]$, заданного формулой

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i).$$

12.5. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $1 < p, q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Постройте изометрический изоморфизм

$$L^q(X, \mu) \to L^p(X, \mu)^*, \quad g \mapsto \alpha_g,$$
$$\text{где } \ \alpha_g(f) = \int_X f(x) g(x)\, d\mu(x).$$

Указание: воспользуйтесь теоремой Радона–Никодима.