

13.1. Для каждой из следующих алгебр A дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: **1)** $A = \mathbb{C}[t]$; **2)** $A = \mathbb{C}[[t]]$; **3)** $A = \mathbb{C}(t)$.

13.2. 1) Придумайте пример линейного оператора в каком-нибудь векторном пространстве, спектр которого строго больше, чем множество его собственных значений.

2) Докажите, что такой оператор есть в любом бесконечномерном векторном пространстве.

13.3. Пусть X — нормированное пространство, $L(X)$ — алгебра всех линейных операторов в X . Обязательно ли подалгебра ограниченных операторов $\mathcal{B}(X) \subset L(X)$ спектрально инвариантна в $L(X)$?

13.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция.

1) Приведите пример, показывающий, что значение f не обязано быть ее существенным значением.

2) Приведите пример, показывающий, что существенное значение f не обязано быть ее значением.

3) Докажите, что если $X = [a, b]$ — отрезок с мерой Лебега, а f непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

13.5. Пусть A — унитарная алгебра, $a \in A$ — ее элемент и $L_a: A \rightarrow A$, $b \mapsto ab$ — оператор умножения. Докажите, что $\sigma(a) = \sigma(L_a)$.

13.6. 1) Пусть A — унитарная алгебра и элемент $a \in A$ обратим слева и справа (т.е. существуют такие $a_\ell, a_r \in A$, что $a_\ell a = a a_r = 1$). Докажите, что a обратим.

2) Приведите пример алгебры и ее элемента, который обратим слева (или справа), но не обратим. (См., однако, задачу 13.9.)

13.7. Пусть A — унитарная алгебра.

1) Пусть $a_1, \dots, a_n \in A$ — коммутирующие элементы. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы a_1, \dots, a_n обратимы.

2) Покажите, что для некоммутирующих a_1, \dots, a_n утверждение из п.1 перестает быть верным. (См., однако, задачу 13.9.)

13.8. 1) Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ и $|b| < 1$. Положим $c = (1 - ab)^{-1} = \sum_n (ab)^n$. Выразите элемент $(1 - ba)^{-1}$ через a, b и c , не пользуясь коммутативностью умножения в \mathbb{C} .

2) Пусть A — унитарная алгебра, $a, b \in A$. Докажите, что элемент $1 - ab$ обратим тогда и только тогда, когда элемент $1 - ba$ обратим.

13.9. Пусть A — унитарная алгебра, $a, b \in A$.

1) Докажите, что $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

2) Докажите, что если a или b обратим, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

3) Приведите пример, показывающий, что в общем случае $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$. (См., однако, задачу 13.9.)

13.10 (необязательная задача). Пусть A — конечномерная алгебра.

1) Докажите, что всякий элемент A , обратимый слева (или справа), обратим.

2) Пусть $a_1, \dots, a_n \in A$. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы a_1, \dots, a_n обратимы.

3) Докажите, что $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ для любых $a, b \in A$.

4*) Докажите что пп. 1–3 сохраняют силу для нётеровых алгебр.

13.11. Пусть A — ненулевая унитарная алгебра, $a \in A$ — нильпотентный элемент. Докажите, что $\sigma(a) = \{0\}$.