Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков. В задаче 6 можно пользоваться изоморфизмом $(L^1)^* \cong L^\infty$.

Вариант 1

1. Оператор $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ действует по правилу

$$(Tf)(x) = \int_{x/2}^{x} f(\sqrt[3]{t})\,dt.$$

Отождествим стандартным способом пространство $L^2[0,1]^*$ с пространством $L^2[0,1]$. Как действует сопряженный оператор $T^*\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$?

2. Функционал $f \in C[-1,1]^*$ задан формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - 2\int_{0}^{1} x(t)\,dt + x(0).$$

Найдите функцию распределения меры, соответствующей этому функционалу, постройте ее график и вычислите ее вариацию.

3. Пусть E — банахово пространство, элементы которого являются ограниченными функциями на множестве X. Для каждого $x \in X$ и каждого $f \in E$ положим $\varepsilon_x(f) = f(x)$ и предположим, что все функционалы ε_x непрерывны на E. Докажите, что $\sup_{x\in X} \|\varepsilon_x\| < \infty$.

4. Пусть X и Y — нормированные пространства, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Предположим, что сопряженный оператор T^* топологически инъективен. Следует ли отсюда, что T сюръективен?

5. Сопоставим каждому линейному оператору $T \in \mathscr{B}(\ell^2)$ бесконечную матрицу $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ по формуле $T_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$, где $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — стандартный ортонормированный базис в ℓ^2. Пусть $S\colon \mathscr{B}(\ell^2) \to \mathscr{B}(\ell^2)$ — линейный оператор, для которого существует такая бесконечная матрица $(\alpha_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, что $S(T)_{ij} = \alpha_{ij}T_{ij}$ для всех $T \in \mathscr{B}(\ell^2)$ и всех $i,j \in \mathbb{N}$. Докажите, что S ограничен.

6. Обозначим через $L^0 = L^0(\mathbb{R})$ пространство классов эквивалентности всех измеримых функций на $\mathbb{R}$, и будем рассматривать $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ и $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ как векторные подпространства в L^0. Снабдим подпространство $L^1 \cap L^2 \subset L^0$ нормой

$$\|f\|_{1,2} = \max\bigl\{\|f\|_1, \|f\|_2\bigr\},$$

а подпространство $L^2 + L^\infty \subset L^0$ — нормой

$$\|g\|^{2,\infty} = \inf\bigl\{\|u\|_2 + \|v\|_\infty : g = u + v,\ u \in L^2,\ v \in L^\infty\bigr\}.$$

Постройте изометрический изоморфизм $(L^1 \cap L^2)^* \cong L^2 + L^\infty$.

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков. В задаче 6 можно пользоваться изоморфизмом $(L^1)^* \cong L^\infty$.

Вариант 2

1. Зафиксируем $a \in [0,1]$ и определим оператор $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ формулой

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x+a}) & \text{при } x+a \leqslant 1, \\ f(\sqrt{x+a-1}) & \text{при } x+a > 1. \end{cases}$$

Отождествим стандартным способом пространство $L^2[0,1]^*$ с пространством $L^2[0,1]$. Как действует сопряженный оператор $T^*\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$?

2. Функционал $f \in C[-1,1]^*$ задан формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{1} t x(t)\, dt - x(0).$$

Найдите функцию распределения меры, соответствующей этому функционалу, постройте ее график и вычислите ее вариацию.

3. Докажите, что всякий непрерывный линейный функционал на рефлексивном банаховом пространстве достигает нормы.

4. Пусть X и Y — нормированные пространства, $T\colon X \to Y$ — сюръективный ограниченный линейный оператор. Верно ли, что сопряженный оператор T^* топологически инъективен?

5. Пусть $(\alpha_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ — бесконечная числовая матрица. Предположим, что для каждого $x \in \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) и каждого $i \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_j \alpha_{ij} x_j$ сходится к некоторому $y_i \in \mathbb{K}$, причем последовательность $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ лежит в ℓ^p. Определим линейный оператор $T\colon \ell^p \to \ell^p$ формулой $T(x)_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j$. Докажите, что T ограничен.

6. Обозначим через $L^0 = L^0(\mathbb{R})$ пространство классов эквивалентности всех измеримых функций на $\mathbb{R}$, и будем рассматривать $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ и $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ как векторные подпространства в L^0. Снабдим подпространство $L^2 \cap L^\infty \subset L^0$ нормой

$$\|f\|_{2,\infty} = \|f\|_2 + \|f\|_\infty,$$

а подпространство $L^1 + L^2 \subset L^0$ — нормой

$$\|g\|^{1,2} = \inf\bigl\{\max\{\|u\|_1, \|v\|_2\} : g = u + v,\ u \in L^1,\ v \in L^2\bigr\}.$$

Постройте изометрический изоморфизм $(L^1 + L^2)^* \cong L^2 \cap L^\infty$.