Листок 7

Задачи 1-5 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Вычислите e^{tA}, где

(а) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, (б) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, (в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (г) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Докажите следующие свойства матричной экспоненты

(1) $Ce^AC^{-1} = e^{CAC^{-1}}$;
(2) $\det e^A = e^{\mathrm{Tr} A}$;
(3) $e^{A+B} = e^Ae^B$, если матрицы A и B перестановочны;
(4) существуют матрицы A и B, для которых $e^{A+B} \neq e^Ae^B$.

3. Найдите общее решение линейных систем; предъявите фундаментальные системы решений:

(а) $\begin{cases} \dot{x} &= x+y \\ \dot{y} &= 3y-2x. \end{cases}$ (б) $\begin{cases} \dot{x} &= -x-5y \\ \dot{y} &= x+y. \end{cases}$

(в) $\begin{cases} \dot{x} &= x-3y \\ \dot{y} &= 3x+y. \end{cases}$ (г) $\begin{cases} \dot{x} &= x-y-z \\ \dot{y} &= x+y \\ \dot{z} &= 3x+z. \end{cases}$

4. Найдите решение линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x+z-y \\ \dot{y} &= x+y-z \\ \dot{z} &= 2x-y. \end{cases},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1, y(0)=0, z(0)=1$.

5. Квазимногочленом степени n с показателем λ называется функция $e^{\lambda x}P(x)$, где $P(x)$ - многочлен степени n. Докажите, что все квазимногочлены с показателем λ степени не более n образуют линейное пространство, инвариантное относительно оператора дифференциирования. Выпишите матрицу этого оператора в каком-нибудь базисе, найдите собственные значения и собственные векторы. Вычислите экспоненту получившейся матрицы; свяжите результат с формулой Тэйлора.

6. Докажите, что экспонента кососимметрической матрицы есть ортогональная матрица.

7. Решите следующие задачи Коши

$$(a)\quad \dot{X} = AX, \qquad X(0)=M,$$
$$(b)\quad \dot{X} = XA, \qquad X(0)=M,$$
$$(c)\quad \dot{X} = AX - XA, \qquad X(0)=M,$$

где $X(t), A, M$ - матрицы $n \times n$

8. Докажите формулу Адамара:

$$e^ABe^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \ldots, \quad \text{т.е. } \mathrm{Ad}\, e^A = e^{\mathrm{ad}\, A}.$$

9. Выведите общую формулу решения задачи Коши для системы неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Здесь A -$n \times n$- матрица, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{b}$ - вектор-столбцы.