Задачи по группам и алгебрам Ли – 1

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. Докажите, что для линейно зависимых x, y, z тождество Якоби $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ следует из антикоммутативности операции $[,]$.

2. Найдите все идеалы **а)** двумерной абелевой алгебры Ли; **б)** двумерной неабелевой алгебры Ли; **в)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; **г)** алгебры Гейзенберга. Найдите факторалгебры Ли для каждого из этих идеалов.

3. Найдите все 2-мерные подалгебры Ли в **а)** алгебре Гейзенберга; **б)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

4. Найдите алгебру Ли (укажите какой-нибудь базис и выпишите операцию коммутатора в этом базисе) всех дифференцирований кольца **а)** $\mathbb{C}[z]$; **б)** $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$. Найдите все идеалы в этих алгебрах Ли.

5. Найдите (с точностью до изоморфизма) все конечномерные алгебры Ли с **а)** одномерным коммутантом; **б)** центром, имеющим коразмерность не больше 2.

6*. Пусть D – дифференцирование некоторой конечномерной алгебры A (не обязательно ассоциативной). Докажите, что $\exp D$ – автоморфизм алгебры A.

7*. Опишите все вещественные алгебры Ли размерности не более 3 с точностью до изоморфизма. Какие из них становятся изоморфными после комплексификации?

8*. Найдите размерность алгебры Ли всех дифференцирований ассоциативной алгебры **а)** двойных чисел $\mathbb{R}[x]/(x^2)$; **б)** кватернионов; **в)** матриц 2×2. Каким из известных вам алгебр Ли эти алгебры Ли изоморфны?

9*. а) Покажите, что 3-мерное пространство векторных полей на комплексной прямой вида $(az^2+bz+c)\frac{\partial}{\partial z}$, где $a,b,c\in\mathbb{C}$, замкнуто относительно коммутатора. **б)** Докажите, что эта 3-мерная алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. **в)** Получилось представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}[z]$. Найдите все его подпредставления.

10*. а) Укажите какое-нибудь точное конечномерное представление алгебры Гейзенберга. **б)** Докажите, что у алгебры Гейзенберга нет *неприводимых* точных конечномерных представлений (*Указание:* центральный элемент должен действовать скалярным оператором по лемме Шура), **в)** зато есть неприводимые точные *бесконечномерные* представления. (*Указание:* в пространстве $\mathbb{C}[z]$ имеется соотношение между операторами умножения на z и дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z}\circ z - z\circ\frac{\partial}{\partial z}=\mathrm{id}$.)