

## Много переменных

**Задача 1.** Найдите мощность множества

- а) всех отображений  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,
- б) непрерывных отображений  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

*Подсказка: они задаются значениями в точках с рациональными координатами.*

**Задача 2.** Можно ли разместить на плоскости несчётное число

- а) непересекающихся кругов;
- б) непересекающихся открытых множеств;
- в) непересекающихся конгруэнтных букв “Т” (составленных из двух перпендикулярных отрезков, конец одного из которых делит второй пополам);
- г) непересекающихся различных букв “Т”.

**Задача 3.** Выясните существование предела и вычислите

- а)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$ ;
- б)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^{\frac{1}{y}}$ ;
- в)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^{\frac{1}{y^2}}$ ;
- г)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin(1/x) \sin(1/y)$ ;
- д)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}$ ;
- е)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ;
- ж)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ .

**Определение 1.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *линейно связным*, если для любых  $x, y \in M$  существует такое непрерывное отображение  $\phi : [0, 1] \rightarrow M$ , что  $\phi(0) = x$ ,  $\phi(1) = y$ .

- Задача 4.** а) Докажите, что всякое линейно связное множество связно.
- б) Докажите, что всякое связное подмножество  $\mathbb{R}$  линейно связно.
- в\*) Докажите, что график функции  $\sin(1/x)$  вместе с точкой  $(0, 0)$  является связным, но не линейно связным подмножеством  $\mathbb{R}^2$ .

**Задача 5.** Определим отображение из отрезка  $[0, 1]$  в  $\mathbb{R}^2$  парой следующих функций  $(f(t), g(t))$ . Запишем  $t$  в троичной системе как  $0.t_1 t_2 t_3 \dots$  (допуская хвост из 2-к). Тогда  $k$ -тая цифра после запятой  $f(t)$  определяется как  $t_{2k-1}$ , если  $t_2 + t_4 + \dots + t_{2k-2}$  чётно, и как  $2 - t_{2k-1}$  иначе. Аналогично,  $k$ -тая цифра после запятой  $g(t)$  определяется как  $t_{2k}$ , если  $t_1 + t_3 + \dots + t_{2k-1}$  чётно, и как  $2 - t_{2k}$  иначе.

- а) Докажите, что это отображение корректно определено и непрерывно.
- б) Докажите, что образом этого отображения является квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
- в) Сколько элементов может лежать в прообразе точки квадрата при таком отображении?
- г\*) Постройте отображение из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^2$ , образом которого является вся плоскость.
- д\*) Постройте отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , образом которого является куб  $[0, 1]^n$ .
- Задача 6\*.** Докажите, что непрерывное отображение отрезка на квадрат не может быть взаимно-однозначным.