14.1. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Докажите, что билинейный оператор $\varphi\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен в следующем смысле: существует такое $C \geqslant 0$, что $\|\varphi(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.

14.2. Пусть A — алгебра, снабженная нормой. Предположим, что умножение $A \times A \to A$ непрерывно. Докажите, что
1) на A существует субмультипликативная норма, эквивалентная исходной;
2) если A унитальна, то на A существует субмультипликативная норма, эквивалентная исходной и удовлетворяющая условию $\|1\| = 1$.

Подсказка. В случае (2) рассмотрите операторы умножения $L_a\colon A \to A,\ b \mapsto ab$.

14.3. 1) Докажите, что пополнение нормированной алгебры — банахова алгебра.
2) Докажите, что факторалгебра нормированной алгебры по замкнутому двустороннему идеалу — нормированная алгебра.

14.4. Докажите, что норма
$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!}$$
на алгебре $C^n[a,b]$ субмультипликативна и эквивалентна норме $\|f\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$ из задачи 4.6. (Здесь, как обычно, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ — равномерная норма.)

14.5. Пусть G — группа, снабженная топологией таким образом, что операция умножения $G \times G \to G$ непрерывна по каждому аргументу. Предположим, что операция $g \mapsto g^{-1}$ непрерывна в единице. Докажите, что она непрерывна всюду на G.

Из предыдущей задачи с учетом доказанного на лекции следует, что операция $a \mapsto a^{-1}$ на группе обратимых элементов любой банаховой алгебры непрерывна.

14.6. 1) Докажите, что в унитальной банаховой алгебре $A \neq 0$ не может существовать таких элементов a, b, что $[a,b] = ab - ba = 1$.
2) Докажите, что на алгебре дифференциальных операторов вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$, где $a_k \in \mathbb{C}[x]$ (она называется *алгеброй Вейля*), не существует субмультипликативных полунорм, кроме тождественно нулевой.

14.7. Пусть A — унитальная нормированная (но не обязательно банахова) алгебра, $A^\times \subset A$ — группа обратимых элементов. Верно ли, что
1) если $a \in A$ и $\|a\| < 1$, то $1 - a \in A^\times$;
2) $A^\times$ открыто в A;
3) отображение $A^\times \to A^\times,\ a \mapsto a^{-1}$ непрерывно?

14.8. Верна ли теорема Гельфанда–Мазура для неполных нормированных алгебр?

14.9. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ для любого $a \in A$, если **1)** $A = L^\infty(X,\mu)$? **2)** $A = C^n[a,b]$?

14.10 (*оператор взвешенного сдвига*)**.** Пусть $H = \ell^2$ и $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Оператор
$$T_\alpha\colon H \to H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$$
называется *оператором взвешенного сдвига.*
1) Вычислите $\|T_\alpha\|$.
2) Вычислите $r(T_\alpha)$. Для каких последовательностей $\alpha \in \ell^\infty$ оператор T_α квазинильпотентен? Приведите конкретный пример такой последовательности.

14.11 (*оператор Вольтерра*)**.** Пусть $I=[a,b]$, $H=L^2(I)$ и $K\in L^2(I\times I)$. *Оператор Вольтерра* $V_K\colon L^2(I)\to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x)=\int_a^x K(x,y)f(y)\,dy$$

(обратите внимание, что это частный случай интегрального оператора Гильберта–Шмидта из задачи 2.12).
1) Докажите, что если функция K ограничена, то V_K квазинильпотентен.
2*) Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K\in L^2(I\times I)$.

Функциональные алгебры на плоских множествах

Пусть $K\subset\mathbb{C}$ — компактное подмножество. Рассмотрим следующие подалгебры в $C(K)$:

$$\mathscr{P}(K)=\overline{\{p|_K : p \text{ — многочлен}\}};$$
$$\mathscr{R}(K)=\overline{\{r|_K : r \text{ — рациональная функция с полюсами вне } K\}};$$
$$\mathscr{A}(K)=\{f\in C(K) : f \text{ голоморфна на } \operatorname{Int}K\}$$

(черта наверху означает замыкание в $C(K)$). Очевидно, $\mathscr{P}(K)\subset\mathscr{R}(K)$.

14.12. Докажите, что $\mathscr{A}(K)$ — замкнутая подалгебра в $C(K)$. Как следствие, $\mathscr{R}(K)\subset\mathscr{A}(K)$.

14.13 (*дисковая алгебра*)**.** Пусть $\overline{\mathbb{D}}=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leqslant 1\}$.
1) Докажите, что $\mathscr{P}(\overline{\mathbb{D}})=\mathscr{R}(\overline{\mathbb{D}})=\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.
2) Постройте изометрический изоморфизм $\mathscr{P}(\mathbb{T})\cong\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

14.14. 1) Докажите, что $\mathscr{P}(\mathbb{T})\neq\mathscr{R}(\mathbb{T})$.
2) Пользуясь теоремой Вейерштрасса (любая непрерывная 2π-периодическая функция на прямой приближается по равномерной норме тригонометрическими многочленами), докажите, что $\mathscr{R}(\mathbb{T})=C(\mathbb{T})$.

14.15. 1) Докажите, что $\mathscr{R}(K)$ спектрально инвариантна в $C(K)$.
2) Всегда ли $\mathscr{P}(K)$ спектрально инвариантна в $C(K)$?

14.16. 1) Докажите, что если $\mathscr{P}(K)=\mathscr{R}(K)$, то $\mathbb{C}\setminus K$ связно.
2) Докажите, что если $\mathbb{C}\setminus K$ связно, то $\mathscr{P}(K)=\mathscr{R}(K)$. (На самом деле верно большее: $\mathscr{P}(K)=\mathscr{A}(K)$, но это уже нетривиальная теорема Мергеляна.)

14.17 (*швейцарский сыр*)**.** Пусть $K=\overline{\mathbb{D}}\setminus\bigcup_{i=1}^\infty D_i$, где D_i — открытые круги с попарно не пересекающимися замыканиями, выбранные таким образом, что $\sum_i r_i<\infty$ (где r_i — радиус D_i) и $\operatorname{Int}K=\varnothing$. Докажите, что $\mathscr{R}(K)\neq C(K)$ (несмотря на то, что $\operatorname{Int}K=\varnothing$).

Подсказка. Постройте ненулевую меру μ на K, сосредоточенную на объединении границ кругов D_i и такую, что $\int_K f\,d\mu=0$ для любой $f\in\mathscr{R}(K)$.