А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 14

Одним из важнейших инвариантов линейного оператора является его спектр. Он содержит в себе хоть и не всю информацию об операторе, но весьма существенную ее часть. Понятие спектра придумал Гильберт в начале XX в. в связи с некоторыми задачами теории интегральных уравнений. Интересно, что первоначально оно никак не было связано с тем понятием спектра, которое встречается в физике — совпадение терминов было чисто случайным. Однако впоследствии — после создания математического аппарата квантовой механики в 1920-х–1930-х гг. — чудесным образом оказалось, что связь все же есть. Мы обсудим ее в самом конце нашего курса, если позволит время. А пока наша скромная цель состоит в том, чтобы познакомиться с самыми основами спектральной теории.

Само по себе понятие спектра носит чисто алгебраический характер и имеет смысл не только для линейных операторов, но и для элементов произвольных ассоциативных алгебр.

14.1. Спектр элемента алгебры

В дальнейшем мы будем работать над полем комплексных чисел[1] $\mathbb{C}$.

Определение 14.1. *Алгеброй* (точнее, *ассоциативной* $\mathbb{C}$-*алгеброй*) называется ассоциативное кольцо A, снабженное структурой векторного пространства над $\mathbb{C}$ таким образом, что умножение $A \times A \to A$ билинейно над $\mathbb{C}$. Иначе говоря, требуется, чтобы для любых $a, b \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнялись тождества $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$.

Алгебра с единицей (нейтральным элементом по умножению) 1_A называется *унитальной.*

Определение 14.2. Пусть A и B — алгебры. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом алгебр* (в дальнейшем — просто *гомоморфизмом*), если оно является гомоморфизмом колец и, кроме того, $\mathbb{C}$-линейно.

Если алгебры A и B унитальны, то гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ называется *унитальным,* если $\varphi(1_A) = 1_B$.

Определение 14.3. Пусть A — унитальная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым,* если существует такой элемент $a^{-1} \in A$ (называемый *обратным* к a), что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

[1] Хотя формально определение спектра можно дать для алгебр над любым полем, в том числе и над $\mathbb{R}$, тем не менее для построения содержательной теории нам вскоре понадобится пользоваться всеми известными преимуществами поля $\mathbb{C}$ — и его алгебраической замкнутостью, и теорией аналитических функций комплексного переменного.

Из курса алгебры вы знаете, что если обратный элемент к a существует, то он единственный.

Множество всех обратимых элементов алгебры A будет в дальнейшем обозначаться через $A^\times$. Очевидно, $A^\times$ — группа по умножению.

Определение 14.4. Пусть A — унитальная алгебра. *Спектром* элемента $a \in A$ называется множество

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ необратим } \}.$$

Множество $\rho_A(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$ называется *резольвентным множеством* элемента a.

Посмотрим на некоторые примеры.

Пример 14.1. Если $A = \mathbb{C}$, то легко видеть, что $\sigma_{\mathbb{C}}(\lambda) = \{\lambda\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Следующий пример более содержателен и известен вам из курса алгебры.

Пример 14.2. Пусть X — конечномерное векторное пространство. Обозначим через $L(X)$ алгебру всех линейных операторов в X. Напомним, что оператор $T \in L(X)$ обратим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} T = 0$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_X) \neq 0 \iff \lambda \text{ — собственное значение } T.$$

Таким образом, спектр оператора в конечномерном пространстве — это множество всех его собственных значений.

Предостережение 14.1. Разумеется, если $\operatorname{Ker} T = 0$, то оператор $T \in L(X)$ необратим независимо от того, конечномерно пространство X или нет. Поэтому собственные значения оператора T всегда принадлежат его спектру. Однако если X бесконечномерно, то в X всегда есть оператор, спектр которого строго больше множества его собственных значений (см. задачу 13.2).

Посмотрим теперь на спектры элементов различных алгебр, состоящих из функций.

Пример 14.3. Пусть X — множество и $\mathbb{C}^X$ — алгебра всех комплексных функций на X относительно поточечного умножения. Ясно, что элемент $f \in \mathbb{C}^X$ обратим тогда и только тогда, когда $f(x) \neq 0$ для всех $x \in X$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(f) \iff \exists x \in X : (f - \lambda)(x) = 0 \iff \exists x \in X : \lambda = f(x).$$

Таким образом, $\sigma_{\mathbb{C}^X}(f) = f(X)$, т.е. спектр функции — это множество ее значений.

То же самое верно и для многих других алгебр функций — например, для алгебры $C(X)$ непрерывных функций на топологическом пространстве X, для алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M, для алгебры $\mathscr{O}(U)$ голоморфных функций на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и т.п.

Наблюдение 14.1. Из предыдущего примера видно, что спектр элемента алгебры может быть любым непустым подмножеством в $\mathbb{C}$. В самом деле, если дано подмножество $S \subset \mathbb{C}$, $S \neq \varnothing$, то $S = \sigma_A(a)$ для $A = \mathbb{C}^S$ и функции $a(t) = t$.

Кстати, спектр может быть и пустым (см. задачу 13.1).

Пример 14.4. Пусть по-прежнему X — произвольное множество. Очевидно, пространство $\ell^\infty(X)$ является подалгеброй в $\mathbb{C}^X$. Заметим, что элемент $f \in \ell^\infty(X)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $1/f$ не только определена всюду на X, но и ограничена. Это означает в точности, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $|f(x)| > \varepsilon$ для всех $x \in X$, или, эквивалентно, что $0 \notin \overline{f(X)}$. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(f) \iff 0 \in \overline{(f-\lambda)(X)} \iff \lambda \in \overline{f(X)}.$$

Таким образом, $\sigma_{\ell^\infty(X)}(f) = \overline{f(X)}$, т.е. спектр ограниченной функции как элемента алгебры $\ell^\infty(X)$ — это замыкание множества ее значений.

То же самое верно и для многих других алгебр ограниченных функций — например, для алгебры $C_b(X)$ непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве X, для алгебры $B_{\mathscr{A}}(X)$ измеримых (относительно некоторой σ-алгебры $\mathscr{A} \subset 2^X$) ограниченных функций на множестве X и т.п.

Сопоставляя этот результат с примером 14.3, мы видим, что спектр элемента, вообще говоря, зависит от того, относительно какой алгебры он рассматривается (см. также задачу 13.1).

Кроме того, обратите внимание, что для каждой из алгебр этого примера спектр любого ее элемента — непустой компакт. Скоро мы поймем, что это неспроста...

Пример 14.5. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Пространство $L^\infty(X, \mu)$ классов эквивалентности существенно ограниченных измеримых функций на X является алгеброй относительно поточечного умножения (точнее говоря, произведение классов эквивалентности — это класс эквивалентности поточечного произведения их представителей). Заметим, что элемент $f \in L^\infty(X, \mu)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $1/f$ определена почти всюду на X и существенно ограничена. Это означает в точности, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $|f(x)| > \varepsilon$ почти всюду на X, или, эквивалентно, что существует такая окрестность нуля $U \subset \mathbb{C}$, что $\mu(f^{-1}(U)) = 0$. У этого явления есть специальное название:

Определение 14.5. Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* f, если для любой окрестности $U \subset \mathbb{C}$ точки λ выполнено $\mu(f^{-1}(U)) > 0$.

Предостережение 14.2. Вообще говоря, не всякое значение измеримой функции — существенное, и не всякое существенное значение измеримой функции является ее значением. Впрочем, для непрерывных функций на отрезке понятия значения и существенного значения совпадают (см. задачу 13.4).

Перефразируя сделанные выше выводы, мы видим, что элемент $f \in L^\infty(X, \mu)$ обратим тогда и только тогда, когда 0 не является существенным значением f. Следовательно,

$$\lambda \in \sigma(f) \iff 0 \text{ — существенное значение } f - \lambda \iff \lambda \text{ — существенное значение } f.$$

Таким образом, $\sigma_{L^\infty(X,\mu)}(f)$ — это множество существенных значений функции f.

Перейдем теперь к исследованию общих свойств спектра. Для начала посмотрим, что происходит со спектрами под действием гомоморфизмов.

Предложение 14.2. *Пусть A, B — унитальные алгебры и $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $\varphi(A^\times) \subset B^\times$, *и* $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ *для каждого* $a \in A^\times$;
(ii) $\sigma_B(\varphi(a)) \subset \sigma_A(a)$ *для каждого* $a \in A$;
(iii) $\sigma_B(\varphi(a)) = \sigma_A(a)$ *для каждого* $a \in A \iff \varphi(A \setminus A^\times) \subset \varphi(B \setminus B^\times)$.

Доказательство. (i) Очевидно.

(ii) $\lambda \notin \sigma_A(a)$ тогда и только тогда, когда $a - \lambda 1 \in A^\times$. Отсюда с учетом (i) следует, что $\varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda 1 \in B^\times$, т.е. что $\lambda \notin \sigma_B(\varphi(a))$.

(iii) Импликация ($\Longleftarrow$) доказывается дословно также, как п. (ii). Для доказательства импликации ($\Longrightarrow$) заметим, что $a \notin A^\times$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_A(a)$. Но $\sigma_B(\varphi(a)) = \sigma_A(a)$, поэтому $0 \in \sigma_B(\varphi(a))$, а это и означает, что $\varphi(a) \notin B^\times$. □

Итак, любой гомоморфизм «не увеличивает спектр». Кроме того, гомоморфизм «сохраняет спектр» тогда и только тогда, когда он переводит необратимые элементы в необратимые.

Следствие 14.3. *Пусть A — унитальная алгебра, $B \subset A$ — подалгебра, причем $1_A \in B$. Тогда $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$ для каждого $b \in B$.*

Таким образом, при увеличении алгебры спектр элемента может только уменьшиться. Впрочем, как мы видели в примерах 14.3 и 14.4, он может остаться и прежним, причем для любого элемента подалгебры B. У такой ситуации есть специальное название:

Определение 14.6. Пусть A — унитальная алгебра, $B \subset A$ — подалгебра, причем $1_A \in B$. Подалгебра B называется *спектрально инвариантной* (или *наполненной*) в A, если $B^\times = B \cap A^\times$. Иначе говоря, это означает, что всякий элемент из B, обратимый в A, обратим и в B.

Следующее утверждение немедленно следует из п. (iii) предложения 14.2 и объясняет название «спектрально инвариантная подалгебра».

Следствие 14.4. *Пусть A — унитальная алгебра, $B \subset A$ — подалгебра, причем $1_A \in B$. Подалгебра B спектрально инвариантна в A тогда и только тогда, когда $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для каждого $b \in B$.*

Пример 14.6. Из примеров 14.3 и 14.4 следует, что подалгебры

$$C(X) \subset \mathbb{C}^X, \quad C^\infty(M) \subset \mathbb{C}^M, \quad C_b(X) \subset \ell^\infty(X), \quad B_{\mathscr{A}}(X) \subset \ell^\infty(X)$$

спектрально инвариантны. Вот еще один пример: из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что для любого банахова пространства E подалгебра $\mathscr{B}(E) \subset L(E)$ спектрально инвариантна.

С другой стороны, из тех же примеров 14.3 и 14.4 видно, что подалгебра $\ell^\infty(X)$ не является спектрально инвариантной в $\mathbb{C}^X$ за исключением случая, когда множество X конечно.

14.2. Теоремы об отображении спектра для полиномиального и рационального исчислений

Пусть A — унитальная алгебра.

Определение 14.7. *Полиномиальным исчислением* от элемента $a \in A$ называется унитальный гомоморфизм $\gamma_a^{\mathrm{pol}} \colon \mathbb{C}[t] \to A$, удовлетворяющий условию $\gamma_a^{\mathrm{pol}}(t) = a$.

Предложение 14.5. *Для любого $a \in A$ полиномиальное исчисление от a существует, единственно и задается формулой*

$$\gamma_a^{\mathrm{pol}}(f) = f(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k \qquad \text{для } f = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \in \mathbb{C}[t]. \tag{14.1}$$

Доказательство. Зададим отображение $\gamma_a^{\mathrm{pol}} \colon \mathbb{C}[t] \to A$ формулой (14.1). Легко проверяется, что оно обладает всеми нужными свойствами. $\square$

В дальнейшем для любого $f \in \mathbb{C}[t]$ вместо $\gamma_a^{\mathrm{pol}}(f)$ мы будем обычно писать $f(a)$, как и в формуле (14.1).

Теорема 14.6 (об отображении спектра). *Для любых $a \in A$ и $f \in \mathbb{C}[t]$ справедливо равенство*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

за исключением случая, когда $\sigma(a) = \varnothing$ и $f \in \mathbb{C}1$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 14.7. *Элемент $a \in A$ обратим тогда и только тогда, когда существуют такие $a_\ell, a_r \in A$, что $a_\ell a = a a_r = 1$.*

Лемма 14.8. *Если $a_1, \ldots, a_n \in A$ — коммутирующие элементы, то элемент $a_1 \ldots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.*

Докажите эти леммы самостоятельно в качестве упражнения.

Доказательство теоремы. Случай $\deg f = 0$ тривиален (почему?). Пусть $\deg f > 0$. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разложим многочлен $f - \lambda$ на множители: $f(t) - \lambda = c(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$, где $c \neq 0$. Очевидно, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = f^{-1}(\lambda)$. Поскольку $f(a) - \lambda 1 = c(a - \lambda_1 1) \ldots (a - \lambda_n 1)$, с учетом леммы 14.8 получаем следующее:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(f(a)) &\iff \text{элемент } f(a) - \lambda 1 \text{ необратим} \iff \\
&\iff \exists\, i : \text{элемент } a - \lambda_i 1 \text{ необратим} \iff \\
&\iff \sigma(a) \cap f^{-1}(\lambda) \neq \varnothing \iff \lambda \in f(\sigma(a)).
\end{aligned}$$
$\square$

Перейдем теперь от полиномиального исчисления к рациональному. Для произвольного непустого подмножества $M \subset \mathbb{C}$ обозначим через $R(M)$ подалгебру в $\mathbb{C}(t)$, состоящую из рациональных функций с полюсами вне M. Иначе говоря,

$$R(M) = \{f \in \mathbb{C}(t) : \exists p, q \in \mathbb{C}[t],\ f = p/q,\ q(z) \neq 0\ \forall z \in M\}.$$

Положим также $R(\varnothing) = \mathbb{C}(t)$.

Каждой функции $f \in R(M)$ можно присвоить значение в произвольной точке $z \in M$. Для этого представим f в виде $f = p/q$, где $p, q \in \mathbb{C}[t]$ и q не обращается в нуль на M, и положим по определению $f(z) = p(z)/q(z)$. Получаем «настоящую» функцию $\tilde{f}$ на M, заданную по правилу $\tilde{f}(z) = f(z)$ для всех $z \in M$. Сопоставление $f \mapsto \tilde{f}$ является унитальным гомоморфизмом из $R(M)$ в $\mathbb{C}^M$. Отметим, что этот гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда M бесконечно (почему?); тем не менее, в дальнейшем вместо $\tilde{f}$ мы часто будем писать просто f — к путанице это не приведет.

Легко видеть, что f является обратимым элементом алгебры $R(M)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$ ни в одной точке множества M, т.е. когда $\tilde{f}$ — обратимый элемент алгебры $\mathbb{C}^M$. Поэтому гомоморфизм $f \mapsto \tilde{f}$ сохраняет спектр (см. предложение 14.2 (iii)):

$$\sigma_{R(M)}(f) = \sigma_{\mathbb{C}^M}(\tilde{f}) = f(M). \tag{14.2}$$

Определение 14.8. *Рациональным исчислением* от элемента $a \in A$ на множестве $M \subset \mathbb{C}$ называется унитальный гомоморфизм $\gamma_a^r \colon R(M) \to A$, удовлетворяющий условию $\gamma_a^r(t) = a$.

Если рациональное исчисление от a на M существует, то оно является продолжением полиномиального в очевидном смысле. Поэтому для $f \in R(M)$ вместо $\gamma_a^r(f)$ обычно пишут просто $f(a)$.

Теорема 14.9. *Рациональное исчисление от a на M существует тогда и только тогда, когда $\sigma(a) \subset M$; при этом оно единственно.*

Доказательство. Начнем с доказательства единственности. Если $\gamma = \gamma_a^r$ — рациональное исчисление от a на M, то для любых $p, q \in \mathbb{C}[t]$, где $q(z) \neq 0$ для всех $z \in M$, справедливы равенства

$$\gamma(p/q) = \gamma(pq^{-1}) = \gamma(p)\gamma(q)^{-1} = p(a)q(a)^{-1}.$$

Отсюда понятным образом следует, что рациональное исчисление единственно. Кроме того, с учетом предложения 14.2 и равенства (14.2) получаем

$$\sigma_A(a) = \sigma_A(\gamma(t)) \subset \sigma_{R(M)}(t) = M.$$

Покажем теперь, что условие $\sigma(a) \subset M$ не только необходимо, но и достаточно для существования рационального исчисления от a на M. Возьмем функцию $f \in R(M)$ и представим ее в виде $f = p/q$, где p и q — многочлены и q не обращается в нуль на M. Из теоремы 14.6 следует, что элемент $q(a) \in A$ обратим. Положим $\gamma_a^r(f) = p(a)q(a)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что $\gamma_a^r \colon R(M) \to A$ — корректно определенный гомоморфизм (убедитесь!). $\square$

Замечание 14.3 (*для знакомых с основами коммутативной алгебры*)**.** Заметим, что алгебра $R(M)$ — это в точности кольцо частных алгебры $\mathbb{C}[t]$ относительно мультипликативной системы $S = \{q \in \mathbb{C}[t] : q(z) \neq 0 \, \forall z \in M\}$. Поэтому существование и единственность рационального исчисления сразу следуют из универсального свойства колец частных с учетом того, что элемент $\gamma_a^{\mathrm{pol}}(q)$ обратим в алгебре A для любого $q \in S$.

Теорема 14.10 (об отображении спектра). *Пусть $\sigma(a) \subset M \subset \mathbb{C}$. Тогда для любого $f \in R(M)$ справедливо равенство*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) \tag{14.3}$$

за исключением случая, когда $\sigma(a) = \varnothing$ и $f \in \mathbb{C}1$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma(a) \neq \varnothing$ (случай пустого спектра продумайте самостоятельно). Ограничивая при необходимости функцию f на $\sigma(a)$, мы можем считать, что $M = \sigma(a)$. Положим для удобства обозначений $R = R(M)$ и $\gamma = \gamma_a^r$. Пользуясь (14.2), перепишем формулу (14.3) в виде

$$\sigma_A(\gamma(f)) = f(M) = \sigma_R(f).$$

Таким образом, мы должны показать, что гомоморфизм γ сохраняет спектр. В силу предложения 14.2 (iii) это равносильно тому, что γ переводит необратимые элементы в необратимые. Итак, пусть элемент $f \in R$ необратим. Представим f в виде $f = p/q$, где $p, q \in \mathbb{C}[t]$ и q не обращается в нуль на M. Необратимость f означает, что $p(z) = 0$ для некоторого $z \in M = \sigma(a)$. Отсюда с учетом теоремы 14.6 следует, что элемент $p(a) \in A$ необратим, а значит, и элемент $\gamma(f) = p(a)q(a)^{-1}$ необратим. □

Следствие 14.11. *Для любого обратимого элемента $a \in A$ справедливо равенство*

$$\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Замечание 14.4. Итак, к любому элементу любой унитальной алгебры A можно применять многочлены и рациональные функции, и в обоих случаях справедлива теорема об отображении спектра (см. (14.3)). Естественно задать вопрос: а можно ли как-нибудь расширить запас функций, которые можно применять к нашему элементу? Можно ли применять к нему, скажем, непрерывные или хотя бы аналитические функции? В общем случае, т.е. для произвольных алгебр, ответ отрицателен. Однако вскоре мы увидим, что если $A = \mathscr{B}(X)$ — алгебра ограниченных операторов в банаховом пространстве X (или, более общо, любая унитальная банахова алгебра), то к ее элементам можно применять уже некоторые аналитические функции. Если же H — гильбертово пространство, то к любому самосопряженному оператору $T \in \mathscr{B}(H)$ можно применять все непрерывные функции, определенные на его спектре. При этом теорема об отображении спектра (14.3) сохраняет силу и для непрерывных функций. Гомоморфизмы вида $f \mapsto f(T)$, где T — фиксированный оператор, а f пробегает какую-нибудь алгебру функций, называются *функциональными исчислениями* от оператора T. Они играют очень важную роль в спектральной теории операторов и во всевозможных ее приложениях.