

Задачи по группам и алгебрам Ли – 2

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. а) Покажите, что для любого $x \in L$ оператор $\text{ad}(x) : L \rightarrow L$ является дифференцированием алгебры Ли L (такие дифференцирования алгебры Ли называются *внутренними*). **б)** Докажите, что внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре Ли $\text{Der}(L)$ всех дифференцирований алгебры Ли L .

2. Найдите факторалгебру алгебры Ли $\text{Der}(L)$ по идеалу внутренних дифференцирований, если **а)** L – 3-мерная абелева алгебра Ли; **б)** L – 3-мерная алгебра Гейзенберга.

3. Найдите ранг формы Киллинга для **а)** двумерной неабелевой алгебры Ли; **б)** 3-мерной алгебры Гейзенберга; **в)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; **г)** $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.

4. а) Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ в пространстве $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$ коммутаторами вполне приводимо; **б)** Найдите все неприводимые слагаемые этого представления.

5. Найдите все подпредставления в *коприсоединенном* представлении (т.е. двойственном к присоединенному) для **а)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; **б)** 3-мерной алгебры Гейзенберга.

6*. Покажите, что все дифференцирования ассоциативной алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ внутренние (т.е. имеют вид $X \mapsto AX - XA$ для некоторого $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$). *Указание:* сначала изучите, куда могут отображаться матричные единицы e_{ii} , пользуясь соотношениями $e_{ii}^2 = e_{ii}$ и $e_{ii}e_{jj} = 0$ при $i \neq j$.

7*. **а)** Покажите, что пространство чисто мнимых кватернионов замкнуто относительно операции коммутатора и образует алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. **б)** Докажите, что операторы умножения слева на чисто мнимые кватернионы дают неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ в пространстве кватернионов. **в)** Докажите, что комплексификация этого представления является вполне приводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$, и найдите его неприводимые слагаемые.

8*. Найдите все трехмерные комплексные алгебры Ли, допускающие невырожденное инвариантное скалярное умножение.

9*. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Докажите, что следующие представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ неприводимы: **а)** $S^k V$; **б)** $\Lambda^k V$.

10*. **а)** Докажите, что все комплексные неприводимые представления 2-мерной неабелевой алгебры Ли одномерны. **б)** Докажите, что у 2-мерной неабелевой алгебры Ли существуют неразложимые представления любой размерности.