# Лекции по группам и алгебрам Ли – 1

**Определение 1.** Алгеброй Ли называется векторное пространство с билинейной операцией $[\cdot,\cdot]$ (обычно называемой *коммутатором*), удовлетворяющей следующим аксиомам:

(1) (кососимметричность или антикоммутативность) $[x,x]=0$. Если характеристика основного поля не равна $2$, то это условие равносильно $[x,y]=-[y,x]$
(2) (тождество Якоби) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$.

**Примеры:**

(1) Пусть $A$ – ассоциативная алгебра. Определим алгебру Ли $A^-$ как векторное пространство $A$ с операцией $[a,b]:=ab-ba$.
(2) Пространство $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения есть алгебра Ли над $\mathbb{R}$.
(3) Произвольное векторное пространство с тождественно нулевой операцией коммутатора. Такая алгебра Ли называется *абелевой.*

Следующий пример более общий

**Определение 2.** Дифференцированием алгебры $A$ называется линейный оператор $D:A\to A$, для которого выполнено тождество Лейбница: $D(a\cdot b)=D(a)\cdot b+a\cdot D(b)$.

Ясно, что все дифференцирования алгебры $A$ образуют векторное пространство.

**Предложение 1.** *Пусть $D_1,D_2$ – дифференцирования алгебры $A$. Тогда $D_1D_2-D_2D_1$ – тоже дифференцирование алгебры $A$.*

Таким образом, все дифференцирования алгебры $A$ образуют алгебру Ли. Эта алгебра Ли обозначается $\mathrm{Der}(A)$.

**Пример:** Опишем алгебру Ли $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[z])$ всех дифференцирований алгебры многочленов. Пусть $D\in\mathrm{Der}(\mathbb{C}[z])$. Тогда $D(1)=D(1\cdot 1)=1\cdot D(1)+D(1)\cdot 1=2D(1)$, поэтому $D(1)=0$. Из тождества Лейбница по индукции следует, что $D(z^n)=nz^{n-1}D(z)$. Следовательно, $D=D(z)\frac{\partial}{\partial z}$. Таким образом, $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[z])$ есть пространство полиномиальных векторных полей на комплексной прямой с операцией коммутатора векторных полей. Эта алгебра Ли обычно обозначается $W_1$.

## Словарик

**Определение 3.** Векторное подпространство $I$ в алгебре Ли $L$ называется *идеалом*, если для всевозможных $x\in I,\ y\in L$ выполнено $[x,y]\in I$.

**Предложение 2.** *На факторпространстве $L/I$ корректно определена операция коммутатора. Получившаяся алгебра Ли называется* факторалгеброй.

**Определение 4.** *Коммутантом* алгебры Ли $L$ называется подпространство $[L,L]\subset L$, натянутое на элементы $[x,y]$ для всевозможных $x,y\in L$.

**Предложение 3.** *$[L,L]$ есть идеал в $L$. Факторалгебра $L/[L,L]$ абелева.*

**Определение 5.** *Центром* алгебры Ли $L$ называется подпространство $\mathfrak{Z}(L)\subset L$, состоящее из элементов $x\in L$, таких, что $[x,y]=0$ для всевозможных $y\in L$. Очевидно, $\mathfrak{Z}(L)\subset L$ является идеалом в $L$.

**Определение 6.** Пусть $L_1,L_2$ – алгебры Ли. Линейное отображение $\varphi:L_1\to L_2$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$ для любых $x,y\in L_1$. *Ядром* гомоморфизма $\varphi:L_1\to L_2$ называется подпространство $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{x\in L_1|\ \varphi(x)=0\}$. *Образом* гомоморфизма $\varphi:L_1\to L_2$ называется подпространство $\mathrm{Im}\,\varphi=\{\varphi(x)|\ x\in L_1\}\subset L_2$. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом.*

**Предложение 4** (Теорема о гомоморфизме)**.** *Пусть $\varphi:L_1\to L_2$ – гомоморфизм. Тогда $\mathrm{Ker}\,\varphi$ есть идеал в $L_1$, а $\mathrm{Im}\,\varphi$ – подалгебра в $L_2$, причем $L_1/\mathrm{Ker}\,\varphi\simeq\mathrm{Im}\,\varphi$.*

**Определение 7.** С каждым элементом $x$ алгебры Ли $L$ можно связать *присоединенный оператор* $\operatorname{ad} x : L \to L$, переводящий $y \in L$ в $[x, y] \in L$ для всевозможных $y \in L$. Очевидно, любой идеал в $L$ является инвариантным подпространством для каждого оператора $\operatorname{ad} x$.

## Алгебры Ли малых размерностей

Ближайшей целью будет классификация комплексных алгебр Ли размерности $\leq 3$ с точностью до изоморфизма. Для каждого класса изоморфизма алгебр Ли мы укажем нормальную форму (т.е. зададим базис в пространстве $L$ и выпишем операцию коммутатора в этом базисе).

(1) $\dim L = 1$. Из условия кососимметричности следует, что операция коммутатора в этом случае тождественно нулевая. Итак, всякая 1-мерная алгебра Ли – абелева (и, таким образом, единственна). Базис состоит из вектора $e_1$ с операцией $[e_1, e_1] = 0$.

(2) $\dim L = 2$. Возможны 2 случая. Алгебра Ли $L$ может быть абелевой (и такая, очевидно, единственна) или неабелевой. В последнем случае из кососимметричности операции коммутатора имеем $\dim[L, L] = 1$. Выберем базисные векторы $e_1 \in [L, L]$, $e_2 \notin [L, L]$. Тогда $[e_1, e_2] = \lambda e_1$ для некоторого комплексного $\lambda \neq 0$. Разделив $e_2$ на $\lambda$, получаем базис, в котором операция коммутатора записывается как $[e_1, e_2] = e_1$. Таким образом, 2-мерная неабелева алгебра Ли тоже единственна с точностью до изоморфизма.

(3) $\dim L = 3$. Как и раньше, существует единственная абелева алгебра Ли. Далее, рассмотрим следующие случаи:

**Случай 1:** $\dim[L, L] = 1$. Выберем базисный вектор $e_1 \in [L, L]$. Если $[e_1, L] = 0$ (т.е. $e_1$ лежит в центре алгебры Ли $L$), то существует базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = e_1$. Такая алгебра Ли называется *алгеброй Гейзенберга.*

Если $e_1$ не лежит в центре, то существует $e_2 \in L$, такой, что $[e_1, e_2] = e_1$. Выберем $\tilde{e}_3 \in L$, линейно независимый с $e_1, e_2$. Пусть $[e_1, \tilde{e}_3] = \lambda_1 e_1$, $[e_2, \tilde{e}_3] = \lambda_2 e_1$. Положим $e_3 = \tilde{e}_3 - \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1$. Тогда $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис пространства $L$, такой, что $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$. Таким образом, $L$ есть прямая сумма одномерной и двумерной неабелевой алгебры Ли.

**Случай 2:** $\dim[L, L] = 2$. Если алгебра Ли $[L, L]$ абелева, то выберем базисный элемент $e_3 \notin [L, L]$. Тогда $\operatorname{ad} e_3$ – невырожденный оператор на пространстве $[L, L]$. Классы изоморфизма таких алгебр Ли нумеруются парами (ненулевых комплексных) собственных значений оператора $\operatorname{ad} e_3$ на пространстве $[L, L]$ с точностью до пропорциональности (т.е. одно из собственных значений можно считать равным $1$), и жордановой формой оператора $\operatorname{ad} e_3$ в случае совпадения собственных значений. Таким образом, имеется бесконечно много классов изоморфизма таких алгебр Ли. Пусть $e_1, e_2$ – жорданов базис оператора $\operatorname{ad} e_3$. Тогда операция коммутатора задается следующим образом: $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = \lambda e_2$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, или $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2 + e_1$.

Пусть теперь алгебра Ли $[L, L]$ неабелева. Докажем, что это невозможно. В самом деле, пусть $\{e_1, e_2\}$ – базис пространства $[L, L]$, такой, что $[e_1, e_2] = e_1$. Пусть $e_3 \notin [L, L]$. Имеем из тождества Якоби $[e_1, e_3] = [[e_1, e_2], e_3] = [[e_1, e_3], e_2] + [e_1, [e_2, e_3]]$, следовательно, $[e_1, e_3]$ лежит в коммутанте алгебры Ли $[L, L]$, т.е. $[e_1, e_3] = \lambda e_1$. Отсюда $[[e_1, e_3], e_2] = \lambda[e_1, e_2] = \lambda e_1 = [e_1, e_3]$. Значит, $[e_1, [e_2, e_3]] = 0$, т.е. $[e_2, e_3]$ тоже пропорционально $e_1$. Таким образом, $e_2 \notin [L, L]$. Противоречие.

**Случай 3:** $[L, L] = L$. Докажем, что такая алгебра Ли единственна. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис пространства $L$, тогда все элементы $[e_i e_j]$, $i < j$ линейно независимы. Это означает, что для линейно независимых $x, y \in L$ выполнено $[x, y] \neq 0$.

**Лемма 1.** *Существует* $h \in L$ *такой, что оператор* $\operatorname{ad} h$ *имеет ненулевое собственное значение (т.е. не нильпотентен).*

*Доказательство.* Выберем какой-нибудь ненулевой $x \in L$. Тогда оператор $\operatorname{ad} x$ имеет ранг 2. Если $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, то существует жорданов базис $\{x, y, z\}$, такой, что $\operatorname{ad} x(z) = y$, $\operatorname{ad} x(y) = x$, $\operatorname{ad} x(x) = 0$. Тогда $\operatorname{ad} y(x) = -x$, следовательно, можно взять $h = y$. □

Имеем собственные значения оператора $\operatorname{ad} h$: 0 на векторе $h$ и $-1$ на векторе $x$.

**Лемма 2.** *Третье собственное значение есть* 1.

*Доказательство.* Пусть вектор $z$ дополняет $h, x$ до базиса и лежит в корневом подпространстве с собственным значением $\mu$ относительно оператора $\operatorname{ad} h$. Из тождества Якоби следует, что $[x, z]$ лежит в корневом подпространстве с собственным значением $1 + \mu$. Так как $h \in [L, L]$, то $\mu = 1$. □

Таким образом, в нашей алгебре Ли имееется базис $\{h, x, z\}$, для которого $[h, x] = -x$, $[h, z] = z$, $[x, z] = h$. Можно выбрать стандартный базис $\{h, e, f\}$, такой, что $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Таким образом, наша алгебра Ли $L$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ матриц $2 \times 2$ с нулевым следом: $e = e_{12}$, $f = e_{21}$, $h = e_{11} - e_{22}$.