Листок 8

Задачи 1-5 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Найдите общее решение линейных дифференциальных уравнений. Предъявите какую-либо фундаментальную систему решений:
   (а) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$, (б) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

2. Решите задачу Коши для линейного уравнения $y''' - y'' + y' - y = 0$ с начальными условиями $y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0$.

3. Решите уравнения:
   (а) $y'' - y = xe^{2x}$,
   (б) $y'' + y = \cos x$,
   (в) $y'' - 2y' + 5y = e^x$,
   (г) $y'' - 2y' + y = e^{-x}\cos x$.

4. Составьте однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, решениями которого являются функции (а) e^x, e^{2x}; (б) x^2e^x; (в) $x\sin x, e^x$.

5. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$
   а) ограничены на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$?
   б) стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

6. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0y = 0$. Докажите, что функция $z = e^{\lambda x}y$ также удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Выпишите характеристический многочлен этого уравнения.

7. Для заданного $b > 0$ укажите такое a, при котором решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 0$ быстрее всего стремится к нулю при $x \to \infty$?

8. Докажите, что Уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0y = 0$$

где $a_0, \ldots, a_{n-1}$- действительные числа, заменой независимого переменного можно привести к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Найдите характеристический многочлен полученного уравнения и его общее решение. Решите таким способом уравнение $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{n(n+1)}{x^2}y = 0$.

9. Докажите, что тригонометрическая замена переменных $x = \cos\varphi$ приводит уравнение $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$ к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Найдите его решеня. Покажите, что одно из решений - полином Чебышева n-ого порядка, а второе - квадратичная иррациональность.

10. Найдите характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Докажите, что для всякой такой матрицы характеристический многочлен совпадает с минимальным.