Задачи по комплексному анализу

1. Пусть $U = \{|z| < 1\},\ S = \{|z| = 1\}$. Существует ли голоморфная в U функция $f(z)$, ряд Тэйлора которой (в нуле) имеет радиус сходимости 1, и

a) f голоморфна в некотором большем круге?

b) ряд расходится во всех точках S?

c) ряд расходится ровно в 17 точках S?

d) f непрерывна в $\overline{U}$, но не продолжается до голоморфной функции в большем круге?

e) f не продолжается до голоморфной функции в большей области?

f) f непрерывна в $\overline{U}$, но не продолжается до голоморфной функции в большей области?

2. Докажите, что функция мероморфная на $\mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{CP}^1$ рациональна.

3. Найдите все автоморфизмы a) круга $U = \{|z| < 1\}$; b) кольца $R_{a,b} = \{a \leq |z| \leq b\}$.

c) При каких значениях a, b, c, d кольца $R_{a,b}$ и $R_{c,d}$ изоморфны?

d) При каких длинах сторон существует биголоморфный изоморфизм прямоугольника на квадрат, переводящий вершины в вершины?

e) Придумайте какой-нибудь биголоморфный изоморфизм внутренности квадрата со стороной 1 и прямоугольника со сторонами 1 и 2.

4. Сколько корней уравнения $z^8 - 4z^5 - z + 1$ имеют модуль меньше 1?

5. Пусть $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, и $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$. Докажите, что a) $f(x)$ имеет ровно $2n$ корней на полуинтервале $]0; 2\pi]$; b) все ее корни вещественны.

6. Пусть последовательность голоморфных функций f_n равномерно сходится к функции $f \neq 0$ в области U. Докажите, что число нулей функций f_n в области U стабилизируется с ростом n.

7. Вычислите интегралы a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$; b) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$;

c) Пусть функции f, φ голоморфны в области U с границей Γ. Какой геометрический смысл имеет интеграл $\oint_\Gamma \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)-a} dz$?

8. Пусть $f(z)$ непрерывна в круге $\{|z| \leq 1\}$, голоморфна внутри и обращается в нуль на некоторой дуге окружности. Докажите, что $f \equiv 0$.

9. Найдите все пары целых функций $f(z), g(z)$ такие, что a) $\exp(f) + \exp(g) \equiv 1$; b) $f^n + g^n \equiv 1,\ n \geq 3$.

10. Докажите, что a) уравнение $z \exp(z) = a$ разрешимо при любом $a \in \mathbb{C}$;

b) уравнение $z = \operatorname{tg} z$ имеет только вещественные корни.

11. Докажите малую теорему Пикара: целая функция принимает все значения, кроме, быть может, одного.

12. Существует ли голоморфная ненулевая функция, ограниченная в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ и a) имеющая бесконечно много нулей (в этой полуплоскости);

b) обнуляющаяся во всех натуральных точках?

13. Пусть значения некоторого многочлена во всех целых точках являются точными кубами (целых чисел). Докажите, что сам этот многочлен является кубом некоторого многочлена.

14. Докажите, что поле двоякопериодических функций порождено функцией Вейерштрасса $\wp(z)$ и ее производной $\wp'(z)$, а всякая четная двоякопериодическая функция являетя рациональной функцией от $\wp(z)$.

15. Докажите, что узел трилистника нельзя развязать (т.е. фундаментальная группа дополнения $\mathbb{R}^3$ до этого узла не равна $\mathbb{Z}$, в отличие от дополнения к незаузленной окружности).