Задачи по комплексному анализу 1, 1 февраля 2011

1. Пусть f — голоморфная функция в области D, а γ — замкнутая кривая в D. Докажите, что $\int\limits_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz$ — чисто мнимое комплексное число.

2. Пусть f — голоморфная функция в области D и $|f(z)-1|<1$, а γ — замкнутая кривая в D. Докажите, что $\int\limits_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 0$.

3. Пусть $P(z)$ — многочлен. Докажите, что $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=R} P(z)d\bar{z} = -R^2P'(a)$.

4. Целая (на всей плоскости) функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству $|f(z)|<|z|^{2011}$ для всех достаточно больших по модулю z. Докажите, что $f(z)$ — многочлен, степень которого не превышает 2011.

5. Существует ли такая голоморфная функция $f(z)$, что все ее производные в некоторой точке a удовлетворяют неравенству $|f^{(n)}(a)|>n!n^n$?

6. Внутри открытого прямоугольника П нарисована буква W. Известно, что функция f непрерывна внутри П и голоморфна всюду вне буквы W. Докажите, что она голоморфна всюду внутри П.

7. А существует ли функция f, голоморфная в области $\Pi\setminus W$, которую нельзя непрерывно продолжить на П?

8. Вычислите интегралы (против часовой стрелки): a) $\int\limits_{|z-2|+|z+2|=6} \exp(\frac{1}{1-z})\frac{dz}{z}$; b) $\int\limits_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+1}dz$; c) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^3dz}{\exp(z^2)-1}$; d) $\int\limits_{|z|=2} \frac{2}{z^3(z^{10}-2)}$.

9. Вычислите интегралы: a) $\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta},\ a>1$; b) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$; c) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx,\ a\in\mathbb{R}$; d) $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ a\in\mathbb{R}$; e) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx,\ k>0$; f) $\int\limits_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$; g) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)}dx,\ 0<a<1$.

10. Докажите, что a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}$; b) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^p}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{(p+1)\pi}{2n}}$, если p — четное число между 0 и $2n-2$. Если же p — нечетное число между 0 и $2n-2$, то интеграл равен 0.

11. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Re} z|<\frac{\pi}{4}$, удовлетворяет там неравенству $|f(z)|<1$ и обращается в нуль в точке $z=0$. Докажите, что $\left|\frac{f(z)}{\tan z}\right|\le 1$ в этой полосе.

12. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. Известно, что $|f(z)|<1$ и что f обращается в нуль в точках $z_1,\dots,z_n$. Докажите, что $|f(z)|\le\frac{|z-z_1||z-z_2|\dots|z-z_n|}{z+\bar{z}_1||z+\bar{z}_2|\dots|z+\bar{z}_n|}$.

13. Даны функции $f_1(z),\dots,f_n(z)$, голоморфные в замыкании ограниченной области D. Докажите, что сумма $|f_1(z)|+\ldots+|f_n(z)|$ достигает максимума на границе ∂D.