

Задачи 1-5 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. (а) Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы  $m$  под действием внешней силы  $F = \sin \omega t$ , если коэффициент жесткости равен  $k^2$ , а коэффициент трения равен  $a$ .  
 (б) Для какой частоты  $\omega$  колебаний внешней силы амплитуда вынужденных колебаний максимальна?
2. К колебательному контуру, состоящему из индуктивности  $L$  и конденсатора ёмкости  $C$ , подсоединен (так, что все участки цепи соединены последовательно) источник переменного тока, дающий напряжение  $U = V \sin \omega t$ .  
 (а) Найдите силу тока в установившемся режиме.  
 (б) Найдите зависимость тока от времени, если в начальный момент времени  $t = 0$  ток в цепи отсутствовал, а заряд конденсатора составлял  $q$ .
3. Цепь длиной 4 м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент движения свисал конец цепи длиной 0.5 м. Пренебрегая трением, найти время соскальзывания всей цепи.
4. Один грамм вещества  $A$  превращается постепенно в промежуточное вещество  $B$ , которое далее превращается в вещество  $C$ . Скорость превращения вещества  $A$  в вещество  $B$  пропорциональна с коэффициентом пропорциональности  $k_1$  количеству имеющегося на данный момент вещества  $A$ , скорость превращения вещества  $B$  в вещество  $C$  пропорциональна с коэффициентом пропорциональности  $k_2$  количеству имеющегося на данный момент вещества  $B$ . Найти количество вещества  $C$  в любой момент времени.
5. (Филиппов 638) Последовательно включены: самоиндукция  $L$ , сопротивление  $R$  и конденсатор ёмкости  $C$ , заряд которого при  $t = 0$  равен  $q$ . Цепь замыкается при  $t = 0$ . Найти силу тока в цепи и частоту убывающих колебаний в том случае, когда разряд носит колебательный характер.
6. (см. Филиппов 879) К источнику тока с напряжением  $E = V \sin \omega t$  последовательно присоединено сопротивление  $R$ . Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых включена самоиндукция  $L$ , а в другой - ёмкость  $C$ . Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через конденсатор. При какой частоте  $\omega$  сила тока наибольшая?
7. (а) Последовательность чисел Фибоначчи  $\{u_n\}$  удовлетворяет линейному разностному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  с начальными условиями  $u_1 = u_2 = 1$ . Найдите все решения этого разностного уравнения и явную формулу для  $u_n$  как решение соответствующей задачи Коши.  
 (б) Пусть  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$  - сумма первых  $n$  чисел Фибоначчи. Найдите линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, которому удовлетворяет последовательность  $\{s_n\}$ , его фундаментальную систему решений и явную формулу для  $s_n$ .  
 (в) Тот же вопрос про последовательность  $p_n = \sum_{k=1}^n kq^k$ .
8. (а) Покажите, что разностное уравнение на числа Фибоначчи  $u(n) \equiv u_n$  можно переписать в виде  $u^{(n)}(n) - 3u^{(n)}(n) + u(n) = 0$ , где  $u^{(n)}(n) = u(n) - u(n-1)$  - разностная производная  $u(n)$  как функции дискретного переменного  $n$ .  
 (б) Пусть  $S_k(n)$  - сумма  $k$ -ых степеней первых  $n$  натуральных чисел. Составьте линейное разностное уравнение порядка  $k + 1$ , которому удовлетворяет последовательность  $S_k(n)$ , предъявите его общее решение и объясните, решением какой задачи Коши является последовательность  $S_k(n)$ .
9. Найдите форму равновесия однородной тяжелой нерастяжимой нити с закрепленными концами.