# Задачи по группам и алгебрам Ли – 3

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

**1.** **а)** Покажите, что все комплексные неприводимые представления любой абелевой алгебры Ли одномерны. **б)** Покажите, что в любом неприводимом представлении алгебры Ли $L$ все элементы центра универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ действуют скалярными операторами. (*Указание:* вспомните лемму Шура).

**2.** Покажите, что всякое дифференцирование алгебры Ли $L$ единственным образом продолжается до дифференцирования **а)** симметрической алгебры $S(L)$; **б)** тензорной алгебры $T(L)$; **в)** универсальной обертывающей алгебры $U(L)$.

**3.** Найдите центр универсальной обертывающей алгебры $U(L)$, если **а)** L – 2-мерная неабелева алгебра Ли; **б)** L – 3-мерная алгебра Гейзенберга. (*Указание:* элемент лежит в центре $U(L)$, если и только если он коммутирует со всеми элементами *алгебры Ли* $L$).

**4.** Пусть $e, f, h$ – стандартные образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, такие, что $[e,f]=h$, $[h,e]=2e$, $[h,f]=-2f$. **а)** Докажите, что элемент $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ (называемый *элементом Казимира*) лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. **б)** Докажите, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов $e^i h^j C^k$ или $f^i h^j C^k$, где $i, j, k$ – целые неотрицательные числа. **в)** Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ порожден элементом $C$.

**5.** Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $n > 1$. **а)** Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ в пространстве билинейных форм $V^* \otimes V^*$ есть прямая сумма двух неприводимых представлений $S^2V^* \oplus \Lambda^2 V^*$. **б)** Докажите, что представления $V$ и $V^*$ при $n > 2$ неизоморфны.

**6*.** Пусть $L$ – 3-мерная алгебра Ли, коммутант которой двумерен (см. первую лекцию). В каких случаях универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ имеет нетривиальный центр?

**7*.** Пусть $L$ – положительно градуированная алгебра Ли с рядом Пуанкаре $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k t^k$. Найдите ряд Пуанкаре **а)** симметрической алгебры $S(L)$; **б)** тензорной алгебры $T(L)$; **в)** универсальной обертывающей алгебры $U(L)$.

**8*.** **а)** Докажите, что универсальная обертывающая алгебра свободной алгебры Ли с $n$ образующими есть свободная ассоциативная алгебра с $n$ образующими. **б)** Пусть $l_k(n)$ – размерность $k$-ой однородной компоненты свободной алгебры Ли с $n$ образующими (т.е. пространства, натянутого на всевозможные выражения от образующих свободной алгебры Ли, использующих операцию коммутатора $k-1$ раз). Пользуясь задачей 7, докажите равенство формальных степенных рядов $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-t^k)^{-l_k(n)} = (1-nt)^{-1}$. **в)** Найдите явную формулу для размерности однородных компонент свободной алгебры Ли с $n$ образующими. (*Указание:* Возьмите логарифмическую производную от равенства из пункта (б) и вспомните формулу обращения Мебиуса).

**9*.** Элемент $x$ биалгебры $A$ называется *примитивным*, если его образ при гомоморфизме коумножения $\Delta : A \to A$ есть $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. **а)** Докажите, что пространство примитивных элементов биалгебры $A$ замкнуто относительно коммутатора. **б)** Найдите все примитивные элементы в универсальной обертывающей алгебре $U(L)$. **в)** Докажите, что в конечномерной комплексной биалгебре нет примитивных элементов.

**10*.** **а)** Докажите, что универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ не имеет делителей нуля. **б)** Пусть $x, y$ – ненулевые элементы алгебры $U(L)$. Докажите, что найдутся такие ненулевые элементы $u, v \in U(L)$, что $ux = vy$. (*Указание:* пусть $x \in U(L)^{(n)}$, $y \in U(L)^{(m)}$. Докажите, что $\dim U(L)^{(p)} \cdot x + \dim U(L)^{(p+n-m)} \cdot y \geq \dim U(L)^{(p+n)}$ при достаточно больших $p$). **в)** Докажите, что алгебра $U(L)$ обладает *телом частных*, т.е. на пространтве линейных комбинаций формальных выражений вида $ab^{-1}$, где $a, b \in U(L)$, $b \neq 0$, корректно определены операции умножения и взятия левого и правого обратного.