Проективная прямая. Жордановы формы и действия на $P^1(\mathbb{C})$.

10.1. **а)** Бывают ли проективные преобразования комплексной проективной прямой $P^1(\mathbb{C})$, действующие без неподвижных точек? **б)** Тот же вопрос для вещественной проективной прямой $P^1(\mathbb{R})$.

10.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ (матрица и соответствующее проективное преобразование обозначаются одной и той же буквой). Доказать, что возможны лишь следующие взаимоисключающие случаи:

а) $A = \pm E$ и A действует на $P^1(\mathbb{C})$ тождественно;

б) $A \neq \pm E$ и имеет единственное собственное значение. Тогда у A имеется единственная неподвижная точка на $P^1(\mathbb{C})$ и A сопряжено сдвигу $z \mapsto z+1$ в группе $\mathrm{Aut}P^1(\mathbb{C})$ (такое преобразование называется *параболическим проективным преобразованием*).

10.3. Пусть A есть два невещественных собственных значения, равных по модулю единице. Тогда у A имеются ровно две неподвижные точки и A сопряжено вращению $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| = 1$ (*эллиптическое проективное преобразование*).

10.4. Пусть у A есть два различных вещественных собственных значения. Тогда $|\mathrm{Fix}A| = 2$, и преобразование A сопряжено гомотетии $z \mapsto \lambda^2 z$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (*гиперболическое преобразование*).

10.5. Пусть у A есть два различных собственных значения, но они ни вещественные, ни равные по модулю единице. Тогда $|\mathrm{Fix}A| = 2$, и преобразование A сопряжено подобию $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$, $|\lambda| \neq 1$ (*локсодромическое преобразование*).

10.6. Докажите, что

а) A — параболическое или тождественное $\Leftrightarrow \mathrm{tr}A = \pm 2$;

б) A — эллиптическое $\Leftrightarrow -2 < \mathrm{tr}A < 2$;

в) A — гиперболическое $\Leftrightarrow \mathrm{tr}A \in \mathbb{R}, |\mathrm{tr}A| > 2$.

(Во всех оставшихся случаях преобразование A будет локсодромическим).

10.7. Проведите классификацию проективных преобразований вещественной проективной прямой $P^1(\mathbb{R})$, аналогичную классификации, полученной в предыдущих задачах.

У поля $\mathbb{C}$ есть инволютивный автоморфизм — комплексное сопряжение. Это позволяет наряду с проективными преобразованиями рассматривать и геометрически интересные антипроективные. Вот простейшее из них (называемое инверсией или отражением):
$\sigma\colon \mathbb{C} \cup \infty \to \mathbb{C} \cup \infty$,
$\sigma(z) = \overline{z}$ (в неоднородных координатах).
В однородных координатах $\sigma\colon (z_1, z_2) \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2})$).

Группа проективных и антипроективных преобразований проективной прямой $P^1(\mathbb{C})$ порождается преобразованием σ и группой $PSL(2,\mathbb{C})$. Обозначим эту группу буквой Γ.

10.8. Напишите общий вид преобразования из группы Γ.

10.9. Рассмотрим антипроективную инволюцию, которая в однородных координатах записывается формулой $(z_1, z_2) \mapsto (\overline{z_2}, \overline{z_1})$? Запишите это преобразование относительно аффинной координаты $z = z_1/z_2$. Найдите множество его неподвижных точек.

10.10. Придумайте антиинволюцию, действующую на $P^1(\mathbb{C})$ без неподвижных точек.

10.11. Найдите неподвижные точки преобразования $z \to \dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}$.

10.12. Докажите, что проективные преобразования сохраняют двойное отношение четырех точек $X\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \Big/ \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$.

10.13. Докажите, что $z \mapsto X(z_0, z_\infty, z_1, z)$ — это единственное проективное преобразование, переводящее z_0 в 0, z_1 в 1, z_∞ в ∞.

10.14. Докажите, что $X\{0, \infty, 1, z\} = z$, $X\{\infty, 0, 1, z\} = 1/z$, $X\{\infty, 1, 0, z\} = \dfrac{1}{1-z}$, $X\{0, 1, \infty, z\} = \dfrac{z}{z-1}$, $X\{1, 0, \infty, z\} = \dfrac{z-1}{z}$.

10.15. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Докажите, что тогда γ

а) является проективным преобразованием тогда и только тогда, когда

$$X(\gamma(z_1), \gamma(z_2), \gamma(z_3), \gamma(z_4)) = X(z_1, z_2, z_3, z_4);$$

б) является антипроективным преобразованием тогда и только тогда, когда

$$X(\gamma(z_1), \gamma(z_2), \gamma(z_3), \gamma(z_4)) = \overline{X(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

Окружности на $P^1(\mathbb{C})$ – это неподвижные точки антиинволюций. А для крестьянина — это просто школьные окружности или школьные прямые на аффинной карте $\mathbb{C}$. (Прямая — это окружность, проходящая через т. ∞; почему?)

10.16. Докажите, что любое преобразование из группы Γ переводит окружности в окружности.

10.17. Пусть C — окружность. Докажите, что:

а) существует такая единственная антиинволюция τ, для которой $\mathrm{Fix}\tau = C$;

б) $X(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ для четырех различных точек $z_i \in C$, где $i = 1, 2, 3, 4$;

в) существует такое проективное преобразование γ, что $\gamma(C) = P^1(\mathbb{R})$.

10.18*. Пусть C — простая гладкая кривая на $P^1(C)$. Выполнение для этой кривой любого из необходимых условий, сформулированных в задаче 10.17, гарантирует то, что C — окружность.