Частные производные

Задача 1. Найдите частные производные следующих функций на их области определения и выясните, в каких точках исходные функции дифференцируемы.

a) x^y;

b) x^{y^z};

c) $\sqrt[3]{xy}$;

d) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

e) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, доопределённая нулём в начале координат;

f) $(x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, доопределённая нулём в начале координат;

g) $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, доопределённая нулём в начале координат.

Задача 2. Определим $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, полагая $f(0,0) = 0$.

a) Докажите, что эта функция непрерывна и найдите её частные производные.

b) Будет ли эта функция дифференцируема в начале координат?

c) Сравните в начале координат значения $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f$ и $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f$.

Определение 1. Выражение $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$ называется *оператором Лапласа*. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой $\Delta(f) = 0$ называется *гармонической.*

Задача 3. a) Пусть $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, g — функция одной вещественной переменной. Вычислите $\Delta(g(r^2))$. Выясните, при каких значениях k функция r^k гармоническая.

b^*) Найдите все гармонические функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, зависящие только от расстояния до начала координат.

Задача 4. a) Найдите размерность пространства однородных гармонических многочленов от двух переменных степени d.

b^*) Докажите, что всякий многочлен от переменных x и y можно ровно одним способом записать в виде $\sum H_k(x^2 + y^2)^k$, где H_k — гармонический многочлен.

c^*) Найдите размерность пространства однородных гармонических многочленов от n переменных степени d.

Задача 5. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — функция одной комплексной переменной, $u = \Re e(f)$, $v = \Im m(f)$. Предположим, что u и v дифференцируемы как функции двух вещественных переменных $x = \Re e(z)$, $y = \Im m(z)$.

a) Докажите, что функция f будет дифференцируема как функция комплексной переменной тогда и только тогда, когда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
Подсказка: запишите матрицу умножения на комплексное число $\alpha + i\beta$ как отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

b) Предположим, что f дифференцируема, и при этом u и v имеют непрерывные вторые производные. Докажите, что тогда u и v являются гармоническими функциями от x и y.

Задача 6*. a^*) Пусть D — отображение кольца многочленов $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ в себя, для которого $D(P + Q) = D(P) + D(Q)$ и $D(PQ) = D(P)Q + PD(Q)$. Докажите, что D можно записать выражением вида $P_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + P_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, где $P_1, \dots, P_n$ — многочлены.

b^*) Пусть D — отображение кольца гладких функций от переменных $x_1, \dots, x_n$ в себя, для которого $D(P+Q) = D(P)+D(Q)$ и $D(PQ) = D(P)Q+PD(Q)$. Докажите, что D можно записать выражением вида $P_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + P_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, где $P_1, \dots, P_n$ — гладкие функции.