А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 5

5.1. Гильбертовы пространства

Гильбертовы пространства, о которых пойдет речь ниже, играют весьма важную роль как в самом функциональном анализе, так и в различных его приложениях к дифференциальным уравнениям, геометрии, матфизике, теории представлений и многим другим областям. Определяются они как банаховы пространства, норма в которых порождена скалярным произведением (подробности см. ниже). Наличие скалярного произведения позволяет значительно лучше понять строение гильбертовых пространств, чем это возможно в случае банаховых пространств, и в конечном итоге полностью их классифицировать. Кроме того — и это, пожалуй, еще важнее — для каждого линейного оператора в гильбертовом пространстве определен его так называемый *сопряженный оператор*, действующий в том же пространстве. Наличие операции перехода к сопряженному оператору существенно обогащает теорию операторов и расширяет спектр ее возможных приложений. В частности, самосопряженные операторы (т.е. операторы, совпадающие со своими сопряженными) являются одним из важнейших ингредиентов математического аппарата квантовой механики, с которым мы познакомимся в конце нашего курса.

Понятие скалярного произведения, на котором основано определение гильбертова пространства, вводится аксиоматически. Начнем мы с несколько более общего понятия полуторалинейной формы.

Пусть H — векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение 5.1. Отображение $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если

1) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x,z) + \mu f(y,z)$,
2) $f(x, \lambda y + \mu z) = \bar\lambda f(x,y) + \bar\mu f(x,z)$

для всех $x,y,z \in H$ и $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$.

Определение 5.2. Отображение $q\colon H \to \mathbb{C}$ называется *комплексно-квадратичной формой*, если существует такая полуторалинейная форма $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$, что $q(x) = f(x,x)$ для всех $x \in H$. В этой ситуации говорят, что q *ассоциирована* с f, и пишут $q = q_f$.

На первый взгляд, комплексно-квадратичная форма q_f содержит в себе меньше информации, чем полуторалинейная форма f. Однако это не так: на самом деле f полностью восстанавливается по q_f.

Предложение 5.1 (тождество поляризации)**.** *Для любой полуторалинейной формы $f\colon H\times H \to \mathbb{C}$ справедливо тождество*

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q_f(x + i^k y).$$

Доказательство этого тождества — простое вычисление, которое мы опускаем.

Следствие 5.2. *Пусть $f, g\colon H \times H \to \mathbb{C}$ — полуторалинейные формы. Тогда $f = g \iff q_f = q_g$.*

Замечание 5.1. Обратите внимание, что для билинейных форм утверждение, аналогичное следствию 5.2, неверно: например, любой кососимметрической билинейной форме отвечает квадратичная форма, тождественно равная нулю.

Обозначение 5.1. Пусть $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ — полуторалинейная форма. Для каждых $x, y \in H$ положим $f^*(x, y) = \overline{f(y, x)}$. Очевидно, $f^*\colon H \times H \to \mathbb{C}$ также является полуторалинейной формой.

Определение 5.3. Полуторалинейная форма f называется *эрмитовой*, если $f = f^*$, т.е. $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ для всех $x, y \in H$.

Следствие 5.3. *Полуторалинейная форма f эрмитова тогда и только тогда, когда $q_f(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in H$.*

Доказательство. В силу следствия 5.2, f эрмитова тогда и только тогда, когда $q_f = q_{f^*}$, т.е. когда $f(x, x) = \overline{f(x, x)}$ для всех $x \in H$. Это и означает, что $f(x, x) = q_f(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in H$. □

Определение 5.4. Полуторалинейная форма $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением*, если

1) f эрмитова;
2) $f(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$;
3) $f(x, x) = 0$ только для $x = 0$.

Замечание 5.2. Согласно следствию 5.3, условие (2) в определении скалярного произведения влечет условие (1).

Определение 5.5. *Предгильбертовым пространством* называется векторное пространство над $\mathbb{C}$, снабженное скалярным произведением (точнее, пара (H, f), состоящая из векторного пространства H и скалярного произведения f на нем).

Обозначение 5.2. В дальнейшем скалярное произведение на предгильбертовом пространстве H будет обозначаться символом $\langle x, y \rangle$.

Пример 5.1. Пространство $\mathbb{C}^n$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Пример 5.2. Пространство ℓ^2 является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

Абсолютная сходимость этого ряда вытекает из очевидного неравенства $ab \leqslant a^2 + b^2$, справедливого для всех $a, b \geqslant 0$.

Пример 5.3. Для любого пространства с мерой (X, μ) пространство $L^2(X, \mu)$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из задачи 1.11.

Замечание 5.3. Отметим, что примеры 5.1 и 5.2 — частные случаи примера 5.3, соответствующие считающей мере μ на $X = \{1, \dots, n\}$ или на $X = \mathbb{N}$ (см. также замечание 1.1).

Заметим, что предгильбертовы пространства из приведенных выше примеров являются нормированными пространствами относительно норм $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (см. примеры 1.4, 1.5 и 1.11). Это наводит на мысль, что той же формулой можно ввести норму в любом предгильбертовом пространстве.

Обозначение 5.3. Пусть H — предгильбертово пространство. Для каждого $x \in H$ положим по определению $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Разумеется, надо еще доказать, что введенная таким образом «норма» действительно является нормой, т.е. удовлетворяет аксиомам 1–3 из определения 1.1. Прежде чем это делать, докажем одно важное неравенство.

Предложение 5.4 (неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.** *Для всех $x, y \in H$ справедливо неравенство $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.*

Доказательство. Очевидно, мы можем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0$, т.е.

$$\|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Подставляя сюда $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, получаем $\|x\|^2 - \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geqslant 0$. Дальше ясно. □

Предложение 5.5. *Функция $\|\cdot\| \colon H \to [0, +\infty)$, заданная формулой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, является нормой на H.*

Доказательство. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, для любых элементов $x, y \in H$ получаем:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Это доказывает справедливость неравенства треугольника. Остальные свойства нормы очевидны. □

В дальнейшем каждое предгильбертово пространство будет рассматриваться как нормированное относительно введенной выше нормы.

Предложение 5.6 (тождество параллелограмма)**.** *В предгильбертовом пространстве справедливо тождество*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказательство. Прямая проверка. □

Из тождества параллелограмма нетрудно вывести, что далеко не всякая норма порождается скалярным произведением; более того, далеко не всякая норма эквивалентна норме, порожденной скалярным произведением (см. задачи 5.6 и 5.8). Так что предгильбертовы пространства — это весьма специальный класс нормированных пространств.

Предложение 5.7. *Для любого предгильбертова пространства H скалярное произведение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция.*

Докажите это утверждение сами в качестве упражнения.

Определение 5.6. *Гильбертово пространство* — это предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Примеры 5.4. Предгильбертовы пространства из примеров 5.1–5.3 являются гильбертовыми пространствами (см. следствие 4.3, теорему 4.6 и теорему 4.7). Пространство $C[a,b]$, снабженное унаследованным из $L^2[a,b]$ скалярным произведением, является неполным предгильбертовым пространством (см. задачу 4.5).

Обсудим теперь, какие предгильбертовы пространства следует считать «одинаковыми».

Определение 5.7. Пусть H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства. Линейное отображение $U \colon H_1 \to H_2$ называется *унитарным изоморфизмом*, если оно биективно и $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in H_1$.

Предгильбертовы пространства называются *унитарно изоморфными*, если между ними существует унитарный изоморфизм.

Пример 5.5. Положим $H_1 = L^2(\mathbb{T})$ и $H_2 = L^2[-\pi,\pi]$; тогда, как нетрудно убедиться (убедитесь!), оператор $U \colon H_1 \to H_2$, $(Uf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(e^{it})$ — унитарный изоморфизм.

Следующее предложение показывает, что понятие унитарного изоморфизма на самом деле для нас не ново.

Предложение 5.8. *Пусть H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства. Линейное отображение $U \colon H_1 \to H_2$ удовлетворяет условию $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in H_1$ тогда и только тогда, когда оно изометрично.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством поляризации. □

Следствие 5.9. *Линейное отображение между предгильбертовыми пространствами является унитарным изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно является изометрическим изоморфизмом.*

5.1.1. Проекции и ортогональные дополнения

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 5.8. Говорят, что элементы $x, y \in H$ *ортогональны* (и пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Предложение 5.10 (теорема Пифагора). *Если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Доказательство. Прямая проверка. □

Определение 5.9. Говорят, что элемент $x \in H$ *ортогонален* подмножеству $M \subset H$ (и пишут $x \perp M$), если $x \perp y$ для всех $y \in M$.

Определение 5.10. Для каждого подмножества $M \subset H$ его *ортогональным дополнением* называется множество

$$M^\perp = \{x \in H : x \perp M\}.$$

Причина, по которой ортогональное дополнение называется «дополнением», выяснится впоследствии. А пока установим простейшие свойства ортогональных дополнений.

Предложение 5.11. *Пусть M — подмножество в H.*

(i) *$M^\perp$ — замкнутое векторное подпространство в Y;*
(ii) *$M^\perp = (\overline{\mathrm{span}}(M))^\perp$;*
(iii) *$\{0\}^\perp = H$, $H^\perp = \{0\}$;*
(iv) *$M_1 \subset M_2 \Longrightarrow M_2^\perp \subset M_1^\perp$;*
(v) *$\overline{\mathrm{span}}(M) \subset M^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют из определения скалярного произведения и из его непрерывности, утверждения (iii) и (iv) очевидны, включение $M \subset M^{\perp\perp}$ также очевидно, а из него с учетом (i) следует (v). □

Определение 5.11. Пусть $H_0 \subset H$ — векторное подпространство и $x \in H$. Вектор $y \in H_0$ называется *проекцией* x на H_0, если $x - y \perp H_0$.

Геометрическая интуиция может подсказать и другое разумное определение проекции вектора на подпространство: проекция x на H_0 — это элемент из H_0, *ближайший* к x, т.е. такой элемент $y \in H_0$, что $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ для всех $z \in H_0$ (или, что то же самое, $\|x - y\| = \rho(x, H_0)$). Как и следовало ожидать, эти два определения проекции эквивалентны:

Предложение 5.12. *Пусть H — предгильбертово пространство, $H_0 \subset H$ — векторное подпространство и $x \in H$.*

(i) *Вектор $y \in H_0$ является проекцией x на H_0 тогда и только тогда, когда y — ближайший к x элемент H_0.*
(ii) *Если такой вектор y существует, то он единственный.*

Доказательство. Предположим, что y — проекция x на H_0. Из теоремы Пифагора следует, что для каждого $z \in H_0$

$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geqslant \|x-y\|^2,$$

причем при $z \neq y$ имеем строгое неравенство. Следовательно, y — ближайший к x элемент H_0, и другого такого элемента нет.

Предположим теперь, что y — ближайший к x элемент подпространства H_0. Возьмем $z \in H_0$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = \|x-y+tz\|^2$ $(t \in \mathbb{R})$. Заметим, что $\varphi(t) = \|x-y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle + t^2\|z\|^2$. По условию, φ имеет минимум при $t=0$, откуда $\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle = 0$. Если теперь рассмотреть функцию $\psi(t) = \|x-y+itz\|^2$, то аналогичное рассуждение показывает, что и $\mathrm{Im}\langle x-y, z\rangle = 0$. Следовательно, $\langle x-y, z\rangle = 0$ для любого $z \in H_0$, т.е. y — проекция x на H_0. □

Обратите внимание: пока что мы ничего не утверждаем о существовании проекций. Вначале — простое необходимое условие:

Наблюдение 5.13. Если каждый вектор $x \in H$ обладает проекцией на подпространство $H_0 \subset H$, то H_0 замкнуто. В самом деле, для любого $x \in \overline{H_0}$ имеем $\rho(x, H_0) = 0$, поэтому ближайший к x элемент подпространства H_0 — если только он существует — должен совпадать с самим x.

В случае полного H верно и обратное:

Теорема 5.14 (о проекции)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда каждый вектор $x \in H$ обладает единственной проекцией на H_0.*

Доказательство. Положим $d = \rho(x, H_0)$. Ввиду предложения 5.12, нам достаточно найти элемент $y \in H_0$, для которого $\|x-y\| = d$. Выберем последовательность (y_n) в H_0 так, чтобы $\|x-y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, и покажем, что она сходится к нужному нам y.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|x-y_n\|^2 \leqslant d^2 + \varepsilon$ при $n > N$. Зафиксируем произвольные $m, n > N$ и применим к векторам $x - y_n$ и $x - y_m$ тождество параллелограмма (см. предложение 5.6):

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - \|2x - (y_n+y_m)\|^2 = \\ &= 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(d^2+\varepsilon) + 2(d^2+\varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon,\end{aligned}$$

поскольку $\|x - (y_n+y_m)/2\| \geqslant d$. Отсюда следует, что последовательность (y_n) фундаментальна, и поэтому сходится (ввиду полноты H и замкнутости H_0) к некоторому $y \in H_0$. Вспоминая, что $\|x-y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, получаем $\|x-y\| = d$, как и требовалось. □

Замечание 5.4. На самом деле мы доказали даже более сильное утверждение, чем требовалось: *если H — гильбертово пространство и $M \subset H$ — замкнутое выпуклое подмножество, то для каждого $x \in H$ в множестве M существует единственный элемент, ближайший к x.* Попробуйте понять это, проанализировав доказательство теоремы 5.14.

Теперь мы можем понять, почему ортогональное дополнение так называется.

Теорема 5.15 (об ортогональном дополнении)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Более того, отображение*

$$H_0 \oplus_2 H_0^\perp \to H, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

— изометрический изоморфизм.

Доказательство. Изометричность указанного отображения следует из теоремы Пифагора, а сюръективность — из теоремы о проекции 5.14. □

Следствие 5.16. *Для любого подмножества M гильбертова пространства H справедливо равенство $\overline{\mathrm{span}}(M) = M^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Положим $H_0 = \overline{\mathrm{span}}(M)$. Поскольку $M^\perp = H_0^\perp$ (см. предложение 5.11), нам достаточно доказать равенство $H_0 = H_0^{\perp\perp}$. Применяя теорему 5.15 сначала к H_0, а потом к $H_0^\perp$, получаем разложения

$$H = H_0 \oplus H_0^\perp = H_0^\perp \oplus H_0^{\perp\perp}.$$

Отсюда с учетом включения $H_0 \subset H_0^{\perp\perp}$ (см. предложение 5.11) следует требуемое равенство $H_0 = H_0^{\perp\perp}$. □

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ
Лекция 6

6.1. Направленности и суммируемые семейства

Прежде чем продолжить изучение гильбертовых пространств, нам понадобится ненадолго отвлечься и поговорить о более общих вещах. Напомним сперва определение частично упорядоченного множества.

Определение 6.1. *Отношением* (точнее, *бинарным отношением*) на множестве Λ называется любое подмножество $\mathscr{R} \subset \Lambda \times \Lambda$. Вместо $(\lambda, \mu) \in \mathscr{R}$ пишут $\lambda \mathscr{R} \mu$ и говорят, что элементы λ и μ *находятся в отношении* $\mathscr{R}$.

Определение 6.2. Отношение $\leqslant$ на множестве Λ называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

(i) $\lambda \leqslant \lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$ (*рефлексивность*),
(ii) если $\lambda \leqslant \mu$ и $\mu \leqslant \nu$, то $\lambda \leqslant \nu$ (*транзитивность*),
(iii) если $\lambda \leqslant \mu$ и $\mu \leqslant \lambda$, то $\lambda = \mu$ (*антисимметричность*).

Множество Λ, снабженное отношением порядка, называется *частично упорядоченным множеством.* Если $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $\lambda \leqslant \mu$, то говорят, что λ *не превосходит* μ. Если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ выполнено либо $\lambda \leqslant \mu$, либо $\mu \leqslant \lambda$, то Λ называется *линейно упорядоченным множеством.*

Определение 6.3. Частично упорядоченное множество $(\Lambda, \leqslant)$ называется *направленным*, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \leqslant \nu$ и $\mu \leqslant \nu$.

Вот два типичных примера, которые полезно держать в голове.

Пример 6.1. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и любое линейно упорядоченное множество являются направленными.

Пример 6.2. Пусть Λ — множество всех окрестностей какой-либо точки в топологическом пространстве, упорядоченное по обратному включению (т.е. $U \leqslant V \iff U \supset V$). Легко видеть, что Λ — направленное множество.

Пусть X — топологическое пространство.

Определение 6.4. *Направленностью* в X называется любое отображение $x \colon \Lambda \to X$, где Λ — направленное множество.

Ясно, что понятие направленности обобщает понятие последовательности. Если x — направленность в X, то для $\lambda \in \Lambda$ вместо $x(\lambda)$ обычно пишут x_λ (так же, как это принято в случае последовательностей), а всю направленность x представляют себе как семейство (x_λ), проиндексированное элементами множества Λ.

Сходимость направленностей определяется дословно так же, как для последовательностей:

Определение 6.5. Говорят, что направленность (x_λ) *сходится* к точке $x \in X$ (и пишут $x_\lambda \to x$ или $x = \lim_\Lambda x_\lambda$), если для любой окрестности $U \ni x$ найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $x_\lambda \in U$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Свойства пределов направленностей во многом аналогичны свойствам пределов последовательностей:

Предложение 6.1. *Пусть X — топологическое пространство.*

(i) *Если X хаусдорфово, то каждая сходящаяся направленность в X имеет только один предел.*
(ii) *Если $f\colon X \to Y$ — отображение, непрерывное в точке $x \in X$, то для каждой направленности (x_λ) в X, сходящейся к x, направленность $f(x_\lambda)$ сходится к $f(x)$.*
(iii) *Если Y — подмножество в X и (y_λ) — направленность в Y, сходящаяся к точке $x \in X$, то $x \in \overline{Y}$.*

Доказывается это предложение дословно так же, как и для последовательностей (убедитесь!).

Может возникнуть вопрос: а зачем нужны направленности, если есть последовательности? Основное преимущество направленностей по сравнению с последовательностями состоит в том, что каждое из утверждений предложения 6.1 допускает обращение (см. задачи 6.17–6.19). В частности, множество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит пределы всех своих направленностей, сходящихся в X. Следовательно, топология на множестве полностью определяется запасом сходящихся направленностей. Для последовательностей это уже не так. Бывают, например, недискретные топологические пространства, в которых всякая сходящаяся последовательность стабилизируется (т.е. становится постоянной начиная с некоторого номера) — попробуйте привести пример! Понятно, что в таких пространствах описать топологию с помощью сходящихся последовательностей нельзя. Впрочем, если пространство X метризуемо или, более общим образом, удовлетворяет первой аксиоме счетности (это означает, что каждая его точка обладает счетной базой окрестностей), то, как вам известно из курса анализа, все утверждения предложения 6.1 допускают обращение и в случае последовательностей.

Нам с вами направленности понадобятся для того, чтобы дать следующее важное определение суммируемого семейства. Для произвольного множества I обозначим через $\mathrm{Fin}(I)$ семейство всех его конечных подмножеств и упорядочим $\mathrm{Fin}(I)$ по включению. Очевидно, $\mathrm{Fin}(I)$ — направленное множество.

Пусть теперь X — нормированное пространство.

Определение 6.6. Пусть $(x_i)_{i\in I}$ — семейство элементов в X. Для каждого $A \in \mathrm{Fin}(I)$ положим $x_A = \sum_{i\in A} x_i$. Семейство $(x_i)_{i\in I}$ называется *суммируемым*, если направленность $(x_A)_{A\in \mathrm{Fin}(I)}$ сходится. Предел этой направленности называется *суммой* семейства $(x_i)_{i\in I}$ и обозначается через $\sum_{i\in I} x_i$.

На самом деле можно дать и другое определение суммируемого семейства, не использующее направленностей:

Упражнение 6.1. Докажите, что семейство $(x_i)_{i\in I}$ в нормированном пространстве X суммируемо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) множество $S = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ не более чем счетно;
(ii) если S конечно, то $\sum_{i\in S} x_i = x$, а если S счетно, то для любой биекции $\pi\colon \mathbb{N} \to S$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ сходится к x.

Таким образом, понятие суммируемого семейства фактически сводится к известному вам понятию безусловно сходящегося ряда (т.е. ряда, сходящегося при любой перестановке его членов). Тем не менее, по техническим причинам часто бывает удобнее работать с суммируемыми семействами в смысле определения 6.6, чем с безусловно сходящимися рядами.

Для семейств неотрицательных чисел понятие суммируемости эквивалентно обсуждавшемуся в лекции 3:

Упражнение 6.2. Семейство неотрицательных чисел суммируемо тогда и только тогда, когда оно суммируемо в смысле определения 3.6.

Вот типичный пример суммируемого семейства:

Пример 6.3. Пусть $1 < p < \infty$ и $X = \ell^p(I)$ (см. определение 3.7). Для каждого $i \in I$ обозначим через e_i функцию на I, которая принимает значение 1 в точке i, а в остальных точках равна нулю. Ясно, что $e_i \in \ell^p(I)$. Мы утверждаем, что для любого $x \in \ell^p(I)$ справедливо равенство

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i. \tag{6.1}$$

В самом деле, числовое семейство $(|x_i|^p)$ суммируемо по определению пространства $\ell^p(I)$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A \in \mathrm{Fin}(I)$, что

$$\sum_{i\in I\setminus A} |x_i|^p < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $B \in \mathrm{Fin}(I)$, содержащего A, мы имеем

$$\Bigl\|x - \sum_{i\in B} x_i e_i\Bigr\|^p = \sum_{i\in I\setminus B} |x_i|^p < \varepsilon,$$

а это и означает справедливость формулы (6.1).

6.2. Ортонормированные системы

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 6.7. Система векторов $(e_i)_{i\in I}$ в H называется *ортогональной системой*, если $e_i \perp e_j$ для всех $i \neq j$. Если, кроме того, $\|e_i\| = 1$ для всех $i \in I$, то система $(e_i)_{i\in I}$ называется *ортонормированной системой*.

Пример 6.4. Пусть $H = \mathbb{C}^n$ или $H = \ell^2$, и пусть $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица на i-ом месте). Очевидно, (e_i) — ортонормированная система в H. Более общим образом, если $H = \ell^2(I)$, то система $(e_i)_{i\in I}$ из примера 6.3 тоже является ортонормированной.

В следующих трех примерах описана, по сути, одна и та же система, но «в разных обличьях».

Пример 6.5 (*тригонометрическая система*)**.** Пусть $H = L^2[-\pi, \pi]$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что система функций $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt\right)_{k \in \mathbb{N}}$ — ортонормированная.

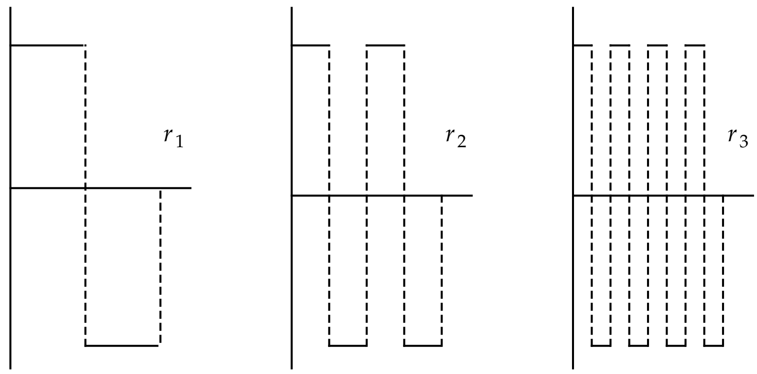
Пример 6.6 (*тригонометрическая система*)**.** Пусть снова $H = L^2[-\pi, \pi]$ и $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортонормированная система.

Пример 6.7 (*тригонометрическая система*)**.** Пусть $H = L^2(\mathbb{T})$ и $e_n(z) = z^n$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортонормированная система.

Упражнение 6.3. Установите взаимосвязь между ортонормированными системами из примеров 6.5–6.7.

Замечание 6.1 (*для знакомых с классической теорией рядов Фурье*)**.** Примеры 6.5–6.7 иллюстрируют взаимосвязь между рядами Фурье по синусам и косинусам и рядами Фурье в комплексной форме.

Пример 6.8 (*Система Радемахера*)**.** Пусть $H = L^2[0, 1]$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ положим $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$:



Нетрудно проверить (проверьте!), что система функций $\{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — ортонормированная. Она называется *системой Радемахера*.

Система Радемахера играет довольно заметную роль в разных разделах математики. На нее можно (и полезно) смотреть как на последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$.

Приступим к изучению общих свойств ортонормированных систем.

Определение 6.8. Пусть $(e_i)_{i \in I}$ — ортонормированная система в H, и пусть $x \in H$. Числа $c_i = \langle x, e_i \rangle$ $(i \in I)$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x относительно системы $(e_i)_{i \in I}$.

Следующее простое предложение описывает, пожалуй, основное геометрическое свойство коэффициентов Фурье.

Предложение 6.2. *Пусть* $(e_1, \ldots, e_n)$ *— ортонормированная система в* H*,* $H_0 = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$*,* $x \in H$ *и* $c_i = \langle x, e_i \rangle$*. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *вектор* $y = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ *— проекция* x *на* H_0*;*
(ii) $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$*;*
(iii) $\rho(x, H_0)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2$.

Доказательство. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ имеем

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n c_i \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - c_j = 0.$$

Это доказывает утверждение (i). Утверждения (ii) и (iii) следуют из (i) и теоремы Пифагора. □

Следствие 6.3 (неравенство Бесселя)**.** *Пусть* $(e_i)_{i \in I}$ *— ортонормированная система в* H*,* $x \in H$ *и* $c_i = \langle x, e_i \rangle$*. Тогда семейство* $|c_i|^2$ *суммируемо и* $\sum_{i \in I} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2$*.*

Доказательство. Из п. (iii) предложения 6.2 следует, что $\sum_{i \in A} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2$ для каждого конечного подмножества $A \subset I$. Остальное следует из определения суммируемого семейства. □

При исследовании гильбертовых пространств[1] важную роль играют ряды по ортонормированным системам, т.е. выражения вида $\sum_{i \in I} a_i e_i$, где $(e_i)_{i \in I}$ — ортонормированная система и $a_i \in \mathbb{C}$. Разумеется, чтобы такое выражение имело смысл, нужно, чтобы семейство $(a_i e_i)_{i \in I}$ было суммируемым.

Определение 6.9. Пусть $(e_i)_{i \in I}$ — ортонормированная система в предгильбертовом пространстве H, $x \in H$ и $c_i = \langle x, e_i \rangle$. Формальное выражение $\sum_{i \in I} c_i e_i$ называется *рядом Фурье* вектора x по системе $(e_i)_{i \in I}$.

Подчеркнем, что мы пока ничего не утверждаем про сходимость ряда Фурье, т.е. про суммируемость семейства $(c_i e_i)_{i \in I}$.

Предложение 6.4. *Пусть* $(e_i)_{i \in I}$ *— ортонормированная система в* H*.*

(i) (единственность ряда Фурье)*. Пусть вектор* $x \in H$ *имеет вид* $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ *для некоторых* $a_i \in \mathbb{C}$*. Тогда* $a_i = \langle x, e_i \rangle$ *для всех* $i \in I$*.*
(ii) *Пусть векторы* $x, y \in H$ *имеют вид* $x = \sum_{i \in I} c_i e_i$*,* $y = \sum_{i \in I} d_i e_i$*. Тогда* $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} c_i \bar{d}_i$*.*
(iii) (равенство Парсеваля)*. Пусть вектор* $x \in H$ *имеет вид* $x = \sum_{i \in I} c_i e_i$*. Тогда* $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |c_i|^2$*.*

Доказательство. (i) Для каждого $j \in I$ с учетом непрерывности скалярного произведения имеем:

$$\langle x, e_j \rangle = \Big\langle \sum_{i \in I} a_i e_i, e_j \Big\rangle = \sum_{i \in I} a_i \langle e_i, e_j \rangle = a_j.$$

(ii) С учетом непрерывности скалярного произведения имеем:

$$\langle x, y \rangle = \Big\langle \sum_{i \in I} c_i e_i, \sum_{j \in I} d_j e_j \Big\rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} c_i \bar{d}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in I} c_i \bar{d}_i.$$

(iii) Очевидным образом следует из (ii). □

[1] А также всюду, где используется техника гильбертовых пространств — в теории функций, матфизике, геометрии, теории представлений…

До сих пор мы занимались изучением свойств ортонормированных систем. А что можно сказать об их существовании? Исходя из известного вам конечномерного случая, естественно попытаться построить «достаточно большую» ортонормированную систему в H — настолько большую, чтобы каждый вектор можно было по ней разложить так, как в предложении 6.4. На самом деле существует не одно, а целых три взаимосвязанных определения «большой» ортонормированной системы.

Определение 6.10. Ортонормированная система $(e_i)_{i \in I}$ в предгильбертовом пространстве H называется

(i) *ортонормированным базисом*, если каждый $x \in H$ имеет вид $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ для некоторых $a_i \in \mathbb{C}$ (или, что эквивалентно ввиду предложения 6.4, каждый вектор $x \in H$ является суммой своего ряда Фурье);

(ii) *тотальной*, если $\overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\} = H$;

(iii) *максимальной*, если она не содержится ни в какой большей ортонормированной системе.

Замечание 6.2. Следует иметь в виду, что ортонормированный базис не является базисом в алгебраическом смысле (за исключением случая, когда H конечномерно). Иначе говоря, ряд Фурье вектора $x \in H$ содержит, вообще говоря, бесконечно много ненулевых членов.

Замечание 6.3. В литературе тотальные ортонормированные системы иногда называют *замкнутыми*, а максимальные — *полными*. Впрочем, эта не слишком удачная терминология, по-видимому, постепенно выходит из употребления.

Следующая теорема устанавливает связь между свойствами базисности, тотальности и максимальности ортонормированных систем.

Теорема 6.5. *Рассмотрим следующие свойства ортонормированной системы $(e_i)_{i \in I}$ в предгильбертовом пространстве H:*

(i) $(e_i)_{i \in I}$ *— ортонормированный базис;*

(ii) $(e_i)_{i \in I}$ *тотальна;*

(iii) $(e_i)_{i \in I}$ *максимальна.*

Тогда (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii). *Если же пространство H гильбертово, то эти три свойства эквивалентны друг другу.*

Доказательство. (i) $\implies$ (ii): очевидно.

(ii) $\implies$ (iii). Если система $(e_i)_{i \in I}$ тотальна, то

$$\{e_i : i \in I\}^\perp = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Следовательно, $(e_i)_{i \in I}$ максимальна.

(ii) $\implies$ (i). Зафиксируем $x \in H$ и для каждого $A \in \operatorname{Fin}(I)$ положим

$$H_A = \operatorname{span}\{e_i : i \in A\}.$$

Из тотальности системы $(e_i)_{i \in I}$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A \in \operatorname{Fin}(I)$, что $\rho(x, H_A) < \varepsilon$. Тогда для любого $B \in \operatorname{Fin}(I)$, содержащего A, с учетом предложения 6.2 имеем

$$\Big\| x - \sum_{i \in B} c_i e_i \Big\| = \rho(x, H_B) \leqslant \rho(x, H_A) < \varepsilon,$$

где $(c_i)_{i\in I}$ — коэффициенты Фурье вектора x. Это и означает, что $x = \sum_{i\in I} c_i e_i$.

Предположим теперь, что пространство H гильбертово, и докажем импликацию (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Положим $H_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}$. Из теоремы об ортогональном дополнении следует, что $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. С другой стороны, $H_0^\perp = 0$ в силу максимальности системы $(e_i)_{i\in I}$. Таким образом, $H = H_0$, т.е. система $(e_i)_{i\in I}$ тотальна. $\square$

А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 7

7.1. Лемма Цорна

Чтобы доказать существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве, нам понадобится один стандартный прием — лемма Цорна. Она часто используется в самых разнообразных областях математики для доказательства существования объектов, которые нельзя построить «вручную».

Пусть $(M, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество.

Определение 7.1. Элемент $m \in M$ называется *максимальным*, если не существует отличного от m элемента $m' \in M$, такого, что $m \leqslant m'$.

Не следует путать понятия максимального и *наибольшего* элементов: наибольший — это «самый большой», а максимальный — это тот, «больше которого не бывает». Разумеется, если множество M линейно упорядочено (т.е. любые два его элемента сравнимы), то эти два понятия совпадают. В общем случае это уже не так. Например, если порядок в M тривиален (т.е. $a \leqslant b \iff a = b$), то каждый элемент будет максимальным, но ни один элемент не будет наибольшим (если только M состоит более чем из одного элемента). Этот же пример показывает, что максимальных элементов может быть много (в то время как наибольший элемент, если он существует, только один).

Вот более содержательный пример.

Пример 7.1. Пусть X — конечномерное векторное пространство. Обозначим через M множество всех линейно независимых подмножеств в X, упорядоченное по включению. Одно из эквивалентных определений базиса таково: базис — это максимальный элемент в M. (Если вы впервые видите такое определение, обязательно докажите, что оно эквивалентно известному вам определению базиса.) Конечно, базис в X существует, но он далеко не единственный (за исключением тривиального случая $X = 0$). А вот наибольшего элемента в M, т.е. такой линейно независимой системы, которая содержала бы все остальные, разумеется, не существует.

Определение 7.2. Подмножество $N \subset M$ называется *ограниченным сверху*, если существует такой $y \in M$ (называемый *верхней гранью* для N), что $x \leqslant y$ для всех $x \in N$.

Лемма Цорна. *Пусть M — частично упорядоченное множество. Предположим, что каждое линейно упорядоченное подмножество в M ограничено сверху. Тогда в M есть максимальный элемент.*

Лемма Цорна эквивалентна другому теоретико-множественному утверждению, которым мы пользуемся довольно часто, не всегда отдавая себе в этом отчет.

Аксиома выбора. *Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — любое семейство непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда существует множество X, пересекающееся с каждым из множеств X_i ровно по одному элементу. Эквивалентно, $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$.*

Аксиома выбора занимает особое место в математике. Вам, возможно, известно, что канторовская «наивная» теория множеств, в которой само понятие множества не имеет формального определения, содержит различные парадоксы. Чтобы от них избавиться, в свое время (в начале XX в.) было построено несколько аксиоматических теорий множеств, в частности, система аксиом Цермело–Френкеля. Оказалось, что аксиома выбора не зависит от остальных аксиом Цермело–Френкеля в том смысле, что ни она сама, ни ее отрицание им не противоречат. Таким образом, можно как принять аксиому выбора, так и не принимать ее — получатся две разных математики. Математика, которой занимаемся мы с вами (она включает в себя и классический математический анализ), принимает аксиому выбора и существенно ее использует.

Подробнее об аксиоме выбора, лемме Цорна и других близких вещах можно прочитать на элементарном популярном уровне в книге Верещагина и Шеня «Начала теории множеств», а с более формальной и строгой точки зрения — в книге Куратовского и Мостовского «Теория множеств».

7.2. Существование ортонормированных базисов и классификация гильбертовых пространств

Теорема 7.1. *В любом гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Согласно теореме 6.5, достаточно доказать существование максимальной ортонормированной системы. Рассмотрим множество M, состоящее из всех ортонормированных подмножеств в гильбертовом пространстве H, и упорядочим его по включению. Нетрудно видеть, что оно удовлетворяет условиям леммы Цорна: если $N \subset M$ — линейно упорядоченное подмножество, то объединение всех ортонормированных подмножеств, принадлежащих N, является верхней гранью для N. Следовательно, в M есть максимальный элемент, а значит, в H есть максимальная ортонормированная система. $\square$

Замечание 7.1. Фактически мы доказали, что в любом предгильбертовом (не обязательно полном) пространстве H есть максимальная ортонормированная система. Однако если H неполно, то такая система уже не обязана быть ортонормированным базисом (см. задачу 6.14).

Упражнение 7.1. С помощью леммы Цорна докажите, что в любом векторном пространстве существует *алгебраический* базис (т.е. максимальная линейно независимая система).

Пример 7.2. Пусть I — произвольное множество. Для каждого $i \in I$ обозначим через e_i функцию на I, которая принимает значение 1 в точке i, а в остальных точках равна нулю. Тогда из (6.1) следует, что $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированный базис в $\ell^2(I)$.

Пример 7.3. Тригонометрическая система (см. примеры 6.5–6.7) является ортонормированным базисом в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ (или, смотря по смыслу, $L^2(\mathbb{T})$). Это следует из классической теории рядов Фурье и будет выведено впоследствии из общей теоремы Стоуна–Вейерштрасса.

По поводу других примеров см. задачи 6.7 и 6.8.

В случае, когда пространство H сепарабельно, ортонормированный базис можно построить «вручную» с помощью *процесса ортогонализации Грама–Шмидта*, который составляет доказательство следующего предложения.

Предложение 7.2. *Пусть H — предгильбертово пространство и $(x_i)_{1\leqslant i<N}$ — линейно независимая система в H (где $N \in \mathbb{N}$ или $N = \infty$). Для каждого $n < N$ положим $H_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда в H существует ортонормированная система $(e_i)_{1\leqslant i<N}$, такая, что $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ для всех $n < N$.*

Доказательство. Положим $e_1 = x_1/\|x_1\|$ и предположим, что векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ уже построены. Положим

$$e'_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i.$$

Согласно предложению 6.2 (i), $e'_n \perp H_{n-1}$. Очевидно, $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_n\}$ и $e'_n \neq 0$ в силу линейной независимости x_i-ых. Остается положить $e_n = e'_n/\|e'_n\|$. □

С помощью процесса ортогонализации получаются многие важные конкретные ортонормированные системы. Вот один пример:

Пример 7.4. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим функцию $x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$ $(t \in \mathbb{R})$. Легко видеть, что $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — линейно независимая система в H. Применяя к ней процесс ортогонализации, получим ортонормированную систему, которая называется *системой Эрмита.* Можно показать (мы это сделаем несколько позже), что система Эрмита является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R})$.

Предложение 7.3. *В любом сепарабельном предгильбертовом пространстве существует не более чем счетный ортонормированный базис.*

Доказательство. Согласно задаче 2.1, в сепарабельном предгильбертовом пространстве существует не более чем счетная тотальная линейно независимая система. Применим к ней процесс ортогонализации (предложение 7.2) и получим требуемый ортонормированный базис. □

Замечание 7.2. В силу задачи 6.9, в сепарабельном предгильбертовом пространстве любая ортонормированная система не более чем счетна. Тем не менее, предложение 7.3 не является следствием теоремы 7.1, т.к. в нем не предполагается, что рассматриваемое пространство полно. На самом деле существуют примеры неполных несепарабельных предгильбертовых пространств, в которых нет ортонормированного базиса (см. S. Gudder, “Inner product spaces”, Amer. Math. Monthly **81** (1974), no. 1, 29–36).

Следующая теорема полностью описывает все гильбертовы пространства с точностью до унитарного изоморфизма.

Теорема 7.4. *Пусть H — гильбертово пространство и $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированный базис в H. Рассмотрим отображение*

$$U\colon H \to \ell^2(I), \quad U(x) = (\langle x, e_i \rangle)_{i\in I}.$$

Тогда U — унитарный изоморфизм.

Доказательство. Из неравенства Бесселя (следствие 6.3) следует, что U действительно отображает H в $\ell^2(I)$, а из базисности системы $(e_i)_{i\in I}$ и равенства Парсеваля (см. предложение 6.4) — что U изометричен. Осталось доказать, что U сюръективен. Для этого рассмотрим подпространство

$$c_{00}(I) = \big\{x \in \ell^2(I) : x_i = 0 \text{ для всех } i \in I, \text{ кроме конечного их числа}\big\}.$$

Из примера 7.2 следует, что $c_{00}(I)$ плотно в $\ell^2(I)$. Кроме того, ясно, что $c_{00}(I) \subset \operatorname{Im} U$. Но $\operatorname{Im} U$ замкнут в $\ell^2(I)$, так как он полон ввиду полноты H и изометричности U. Следовательно, $\operatorname{Im} U = \ell^2(I)$, и U — унитарный изоморфизм. □

Следствие 7.5. *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство унитарно изоморфно пространству ℓ^2.*

Пример 7.5. Из теоремы 7.4 и из тотальности системы Эрмита (см. пример 7.4) следует, что существует унитарный изоморфизм между пространствами $L^2(\mathbb{R})$ и $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ переводящий n-ую функцию Эрмита в n-ый вектор стандартного ортонормированного базиса в $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ (см. пример 7.2). Этот изоморфизм несет в себе глубокий физический смысл: он осуществляет эквивалентность между матричной квантовой механикой Гейзенберга и волновой квантовой механикой Шредингера. Об этом мы поговорим подробнее в конце нашего курса (если позволит время).

Следствие 7.6 (теорема Рисса–Фишера)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированная система в H. Тогда для любого числового семейства $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ семейство $(c_i e_i)_{i\in I}$ суммируемо в H.*

Доказательство. Положим $H_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}$. В силу теоремы 7.4, существует унитарный изоморфизм между H_0 и $\ell^2(I)$, сопоставляющий каждому вектору из H_0 семейство его коэффициентов Фурье относительно системы $(e_i)_{i\in I}$. Для каждого $i \in I$ положим $\bar{e}_i = U(e_i)$. Легко видеть, что $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ — это в точности стандартный ортонормированный базис пространства $\ell^2(I)$ из примера 7.2, поэтому $c = \sum_{i\in I} c_i \bar{e}_i$ в $\ell^2(I)$ (см. формулу (6.1)). Следовательно, $U^{-1}(c) = \sum_{i\in I} c_i e_i$ в H_0, так что семейство $(c_i e_i)_{i\in I}$ суммируемо в H. □

Замечание 7.3. Мы получили теорему Рисса–Фишера как следствие теоремы 7.4. Чаще, однако, поступают наоборот: сначала доказывают теорему Рисса–Фишера, а потом выводят из нее теорему 7.4. В этой связи слушателям курса рекомендуется придумать определение фундаментальной направленности в метрическом пространстве, доказать, что в полном метрическом пространстве каждая фундаментальная направленность сходится (задача 6.20), затем с помощью этого утверждения доказать теорему Рисса–Фишера и, наконец, вывести из нее теорему 7.4.

Классификацию гильбертовых пространств завершают следующие две задачи.

Упражнение 7.2. Все ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве равномощны.

Определение 7.3. Мощность любого ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве называется *гильбертовой размерностью* этого пространства.

Упражнение 7.3. Гильбертовы пространства унитарно изоморфны тогда и только тогда, когда их гильбертовы размерности равны.