16.1. Докажите, что вполне ограниченное метрическое пространство ограничено.

16.2. Постройте последовательность в единичной сфере пространства $C[a,b]$, у которой нет сходящейся подпоследовательности.

16.3. 1) Пусть X — нормированное пространство, $f \in X^* \setminus \{0\}$ и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Докажите, что в X существует 0-перпендикуляр к X_0 тогда и только тогда, когда f достигает нормы.
2) Приведите пример банахова пространства X и собственного замкнутого векторного подпространства $X_0 \subset X$, к которому не существует 0-перпендикуляра.

16.4. Пусть X — нормированное пространство и $M, N \subset X$ вполне ограничены.
1) Докажите, что λM вполне ограничено для любого $\lambda \in \mathbb{K}$.
2) Докажите, что $M + N$ вполне ограничено.

16.5. Докажите, что равномерно непрерывный образ вполне ограниченного метрического пространства вполне ограничен.

16.6. Докажите, что метрическое пространство вполне ограничено тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в нем есть вполне ограниченная ε-сеть.

16.7. Пусть X, Y — метрические пространства, причем X компактно. Сформулируйте и докажите критерий полной ограниченности подмножества в пространстве $C(X,Y)$, обобщающий теорему Арцела–Асколи.

16.8. 1) Докажите, что подмножество $S \subset \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\sup_{x \in S} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(т.е. нормы «хвостов» последовательностей из S равномерно стремятся к нулю).
2) Сформулируйте и докажите аналогичный критерий для пространства c_0.

16.9*. Докажите, что подмножество $S \subset L^p[a,b]$ (где $1 \leqslant p < \infty$) вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|h| < \delta$ и всех $f \in S$ выполнено

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

Указание (достаточность). Для $f \in L^p[a,b]$ функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$ непрерывны и сходятся к f в $L^p[a,b]$. Примените к ним теорему Арцела–Асколи.

Определение 16.1. Пусть X — метрическое пространство. *Расстоянием Хаусдорфа* между ограниченными подмножествами $A, B \subset X$ называется величина

$$\rho_H(A,B) = \max\Big\{\sup_{a \in A} \rho(a,B),\ \sup_{b \in B} \rho(b,A)\Big\}.$$

16.10. Пусть X — метрическое пространство, $A \subset X$ и $r > 0$. Положим $U_r(A) = \{x \in X : \rho(x,A) < r\}$. Докажите, что для любых ограниченных множеств $A, B \subset X$

$$\rho_H(A,B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B),\ B \subset U_r(A)\}.$$

16.11. 1) Докажите, что расстояние Хаусдорфа является метрикой на множестве $\mathfrak{F}(X)$ всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.
2) Верно ли предыдущее утверждение, если убрать условие замкнутости?

16.12*. Докажите, что если X полно, то и $\mathfrak{F}(X)$ полно.

16.13. Докажите, что если X вполне ограничено, то и $\mathfrak{F}(X)$ вполне ограничено.