Алгебра. Листок 8.

Все кольца в этом листке предполагаются коммутативными и с единицей. Подмножество P кольца R называется подкольцом, если P является кольцом относительно тех же операций и той же единицы.

Определение 8.1. *Пусть R и S — коммутативные кольца с единицей. Отображение $f : R \to S$ называется* **гомоморфизмом** *(колец с единицей), если $f(1) = 1$ и $\forall a, b \in R$ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(ab) = f(a)f(b)$. Для гомоморфизма f определяются множества $\operatorname{Ker} f = \{x \in R, \quad f(x) = 0\}$, называемое* **ядром** *f, и $\operatorname{Im} f = \{y \in S, \quad \exists x \in R,$ такой, что $y = f(x)\}$, называемое* **образом** *f.*

Определение 8.2. *Пусть R коммутативное кольцо с единицей. Подмножество $I \subset R$ называется* **идеалом**, *если $\forall a, b \in I$ $a + b \in I$, $-a \in I$ и $\forall x \in R$ $ax \in I$. Идеал $I \neq R$ называется* **нетривиальным**.

$\diamond$ **8.1.** *а) Докажите, что образ гомоморфизма — всегда подкольцо.*
б) Докажите, что ядро гомоморфизма всегда является идеалом.
в) Докажите, что нетривиальный идеал не может содержать 1 и потому никогда не является подкольцом.

$\diamond$ **8.2.** *1) Пусть a — некоторый фиксированный элемент кольца R. Докажите, что множество $\{ax, \quad x \in R\}$ является идеалом в R. Такой идеал называется* **главным** *идеалом, порожденным элементом a и обозначается (a).*
2) Пусть $a_1, \dots a_n$ — некоторый фиксированный набор элементов кольца R. Докажите, что множество $\{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad x_1 \dots x_n \in R\}$ является идеалом в R. Такой идеал называется идеалом, **порожденным элементами** *$a_1, \dots a_n$ и обозначается $(a_1, \dots a_n)$.*

$\diamond$ **8.3.** *а) Докажите, что в кольце целых чисел всякий идеал главный.*
б) Докажите, что в кольце многочленов над любым полем всякий идеал главный.
в) Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ всякий идеал главный.
г) Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, всякий идеал главный.

$\diamond$ **8.4.** *1) Приведите пример неглавного идеала в кольце а) $\mathbb{K}[x, y]$, где $\mathbb{K}$ поле;*
б) $\mathbb{Z}[x]$ многочленов над кольцом $\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$.

$\diamond$ **8.5.** *Докажите, что в любом кольце множество нильпотентных элементов образует идеал. Этот идеал называется* **нильрадикалом** *кольца.*

$\diamond$ **8.6.** *1) Докажите, что если идеал I кольца R содержит обратимый элемент, то $I = R$.*
2) Докажите, что кольцо R является полем тогда и только тогда, когда в нем нет нетривиальных идеалов (т.е. отличных от нулевого и R)

$\diamond$ **8.7.** *Перечислите все идеалы а) в $\mathbb{Z}_n$; б) в $\mathbb{K}[[x]]$, где $\mathbb{K}$ — поле.*

$\diamond$ **8.8.** *Докажите, что любой идеал в прямом произведении колец $R \times S$ имеет вид $I \times J$, где I — некоторый идеал в R, а J — некоторый идеал в S.*

$\diamond$ **8.9.** *а) Пусть $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_m \supset \ldots$ — убывающая последовательность идеалов кольца R. Докажите, что $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ является идеалом. Приведите пример, когда $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{0\}$, хотя все I_m ненулевые.*
б) Пусть $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_m \subset \ldots$ — возрастающая последовательность идеалов кольца R. Докажите, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ является идеалом. Докажите, что все I_m не совпадают с R, то $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ тоже не совпадает с R.
в) Идеал называется **максимальным** *если он не содержится ни в каком другом идеале, отличном от R. С помощью леммы Цорна докажите, что в любом кольце существуют максимальные идеалы, и что любой отличный от R, содержится в некотором максимальном.*

Определение 8.3. *Пусть R коммутативное кольцо с единицей, $I \subset R$ — идеал, $a \in R$ — некоторый фиксированный элемент кольца R. Множество $a+I = \{a+\alpha, \quad \alpha \in I\}$ называется* **смежным классом**. *Множество всех смежных классов обозначается R/I и называется* **факторкольцом** *кольца R по идеалу I. (В задаче 8.10 доказывается, что R/I действительно является кольцом.)*

◇ **8.10.** *а) Докажите, что два смежных класса $a+I$ и $b+I$ либо не пересекаются, либо совпадают, причем совпадение равносильно тому, что $a-b\in I$.*
б) Докажите, что формулы $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$ и $(a+I)\cdot(b+I)=ab+I$ определяют на множестве смежных классов структуру коммутативного кольца с единицей. Оно называется **факторкольцом** *кольца R по идеалу I и обозначается R/I.*

◇ **8.11.** *Продолжение предыдущей задачи.*
1) Докажите, что отображение $\varphi: R\to R/I$, заданное формулой $\varphi(a)=a+I$, является сюръективным гомоморфизмом, причем $\operatorname{Ker}\varphi=I$. При этом φ называется **каноническим гомоморфизмом**.
2) Докажите, что имеется взаимно-однозначное соответствие между идеалами кольца R/I и идеалами кольца R, содержащими I.

◇ **8.12.** *1) Докажите, что $\mathbb{Z}/(n)\cong\mathbb{Z}_n$.* *2) Докажите, что $\mathbb{K}[x]/(x-a)\cong\mathbb{K}$.*

◇ **8.13.** *Докажите, что если N — нильрадикал (см. 8.5) кольца R, то факторкольцо R/N не содержит ненулевых нильпотентов.*

◇ **8.14.** *Докажите, что идеал I кольца R максимален тогда и только тогда, когда R/I поле.*

◇ **8.15. Теорема о гомоморфизме.** *Пусть $f: R\to S$ гомоморфизм колец.*
1) Пусть $a\in R$. Докажите, что множество $\{x\in R,\quad f(x)=f(a)\}$ совпадает со смежным классом $a+\operatorname{Ker}f$.
2) Докажите, что $\operatorname{Im}f\cong R/\operatorname{Ker}f$.
3) Определим гомоморфизм $\bar f: R/\operatorname{Ker}f\to S$ формулой $\bar f(a+\operatorname{Ker}f)=f(a)$. Докажите, что это определение корректно (т.е. не зависит от выбора элемента a, определяющего смежный класс $a+\operatorname{Ker}f$), причем $\bar f$ является инъективным гомоморфизмом.
4) Докажите, что $f=\bar f\circ\varphi$, где φ — канонический гомоморфизм $\varphi: R\to R/\operatorname{Ker}f$.

◇ **8.16.** *Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $g: V\to V$ линейный оператор, $\mathbb{K}[g]=\{a_0g^n+a_1g^{n-1}+\ldots+a_{n-1}g+a_n\operatorname{Id}_V,\quad a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{K}\}$, $P_g(t)$ — минимальный многочлен оператора g. Докажите, что $\mathbb{K}[g]\simeq\mathbb{K}[t]/(P_g(t))$.*

◇ **8.17.** *Пусть $P(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n\in\mathbb{K}[t]$ — фиксированный многочлен, $I=(P(t))$ — главный идеал, порожденный многочленом $P(t)$.*
1) Докажите, что в любом смежном классе $Q(t)+I$ содержится единственный многочлен, степень которого меньше n.
2) Докажите, что факторкольцо $\mathbb{K}[t]/(P(t))$ представляет собой n-мерное линейное пространство над $\mathbb{K}$ с базисом $1=\alpha^0,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$, умножение в котором задается обычным правилом действия со степенями $\alpha^k\cdot\alpha^m=\alpha^{k+m}$ и "правилом понижения степени" $\alpha^n=-(a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n)$.

◇ **8.18.** *Докажите: 1) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\cong\mathbb{C}$;* *2) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)\cong\mathbb{R}\times\mathbb{R}$;* *3) $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$;*
4) $\mathbb{Z}[x]/(x-a)\cong\mathbb{Z}$ $(a\in\mathbb{Z})$; *5) $\mathbb{Z}[x]/(2)\cong\mathbb{Z}_2[x]$;*
6) $\mathbb{Z}[x]/(2,x)\cong\mathbb{Z}_2$ (напомним, что $(2,x)$ — это идеал, порожденный элементами 2 и x).

◇ **8.19.** *Докажите, что если $x^2+px+q\in\mathbb{R}[x]$ — квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, то $\mathbb{R}[x]/(x^2+px+q)\cong\mathbb{C}$.*

◇ **8.20.** *Докажите, что кольца $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ и $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ являются полями, и что они не изоморфны.*

◇ **8.21.** *Докажите, что $\mathbb{K}[x]/(P(x))$ является полем тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ неприводим (т.е. не разлагается в произведение многочленов меньшей степени над $\mathbb{K}$).*

◇ **8.22.** *1) Докажите, что если $a,b\in\mathbb{K}$, $a\neq b$, то $\mathbb{K}[x]/((x-a)(x-b))\cong\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.*
2) Докажите, что $\mathbb{K}[x]/((x-a)^2)\cong\mathbb{K}[x]/(x^2)$, причем это кольцо нельзя представить в виде прямого произведения других колец. Найдите все идеалы этого кольца.
3) Используя результаты задач этого листочка, решите задачу 5.13.

◇ **8.23.** *1) Перечислите все неприводимые многочлены степени n над $\mathbb{F}_p$*
а) для $n=3$ $p=2$; *б) для $n=2$ $p=3$;* *в) для $n=4$ $p=2$.*
2) Используйте полученные многочлены для явного описания в духе задачи 8.17 полей, содержащих, соответственно, 9, 8 и 16 элементов. Докажите, что поля, полученные в каждом из пунктов а), б) и в) при помощи разных многочленов, изоморфны.