# Алгебра. Листок 9.

В этом листке линейные пространства не предполагаются конечномерными, если только явно не указано обратное.

◇ **9.1.** $\dim V = n$. *Докажите, что* $\dim V^* = n$.

◇ **9.2.** *1) Пусть $U$ — линейное подпространство в конечномерном линейном пространстве $V$, $\varphi \in U^*$. Докажите, что существует такая линейная функция $\psi \in V^*$, что ограничение $\psi$ на $U$ совпадает с $\varphi$.*
*2) Докажите то же самое без предположения о конечномерности $V$.*

◇ **9.3.** *Докажите, что если $U$ и $V$ — подпространства в линейном пространстве $W$, то* $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

◇ **9.4.** *Пусть $U$ — линейное подпространство в линейном пространстве $V$.*
*1) Докажите, что $U^* \cong V^*/U^\perp$. 2) Докажите, что $(V/U)^* \cong U^\perp$.*

◇ **9.5.** *Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_n = \{P(t) \in \mathbb{K}[t], \quad \deg P \le n\}$ многочленов степени не выше $n$; пусть* $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.
*1) Зафиксируем $a \in \mathbb{K}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = P^{(k)}(a)$ (значение $k$-ой производной в точке $a$), $k = 0, 1, \ldots, n$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.*
*2) Зафиксируем $n+1$ различную точку $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = P(a_k)$ (значение $P$ в точке $a_k$), $k = 1, \ldots, n+1$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.*
*3) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = \int_0^{k+1} P(t)dt$, $k = 0, 1, \ldots, n$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.*

◇ **9.6.** *Докажите, что линейные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ тогда и только тогда являются базисом $n$-мерного пространства $V^*$, когда* $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} \varphi_n = \{0\}$.

◇ **9.7.** *Докажите, что линейные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ тогда и только тогда линейно независимы, когда* $\dim(\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} \varphi_k) = \dim V - k$.

◇ **9.8.** *Докажите, что если $\varphi, \psi \in V^*$ и $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$, то $\varphi$ и $\psi$ пропорциональны (т.е. $\varphi = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \ne 0$).*

◇ **9.9.** *1) Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение, $f^* : W^* \to V^*$ — сопряженное отображение, и $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$ — сопряженное к сопряженному. Докажите, что ограничение отображения $f^{**}$ на $V \subset V^{**}$ совпадает с отображением $f$.*
*2) Докажите, что в конечномерном случае $f^{**} = f$.*

◇ **9.10.** *Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение, $e_1, \ldots e_n$ и $g_1, \ldots g_m$ — базисы, сответственно в $V$ и $W$, $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots \psi_m$ — двойственные базисы, сответственно в $V^*$ и $W^*$. Как связаны матрицы операторов $f$ и $f^* : W^* \to V^*$, записанные в этих базисах?*

◇ **9.11.** *Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение линейных пространств. Докажите, что*
*1)* $(\operatorname{Ker} f)^\perp \cong \operatorname{Im} f^*$; *2)* $(\operatorname{Im} f)^\perp \cong \operatorname{Ker} f^*$.

◇ **9.12.** *Пусть векторы $v, w \in V$ не пропорциональны. Докажите, что существует такая ненулевая линейная функция $\varphi \in V^*$, что*
*1) $\varphi(v) = 0$; 2) $\varphi(w) \ne 0$; 3) $\varphi(w) \ne 0$, $\varphi(v) = 0$.*

◇ **9.13.** *1) Докажите, что если $\varphi \in V^*$, $\varphi \ne 0$, то $\operatorname{Ker} \varphi$ является максимальным линейным подпространством в $V$, отличным от $V$.*
*2) Докажите, что любое максимальное линейное подпространство в $V$, отличное от $V$, является ядром ненулевой линейной функции.*

◇ **9.14.** *Пусть $f$ — линейный оператор на линейном пространстве $V$, которое не предполагается конечномерным. Докажите* **альтернативу Фредгольма:** *либо уравнение $f(x) = b$ имеет решение при любой правой части $b \in V$, либо уравнение $f^*(y) = 0$ имеет нетривиальное решение.*